

Analiza fenomenului de scurgere reziduală și propunerea de algoritmi de tip LMS/NLMS ameliorați

1. O evaluare cantitativă a fenomenului de scurgere reziduală în cazul algoritmilor RLS.

Un sistem adaptiv plasat în configurația de suprimare a interferențelor are rolul de a reduce un semnal perturbator, suprapus unui semnalului util, dacă se dispune de un semnal puternic corelat cu perturbația [1]. În schema prezentată în Fig. 1 există două intrări, corespunzătoare celor două semnale, primar și secundar. *Semnalul primar* $d(n)$ constă dintr-un semnal util, $v(n)$, peste care este suprapus un semnal perturbator, $y(n)$. Filtrul adaptiv are rolul de a crea, folosind ca intrare un semnal de referință $x(n)$ [*semnalul secundar*, puternic corelat cu semnalul perturbator $y(n)$], un semnal “asemănător” celui perturbator, care să fie scăzut din semnalul primar.

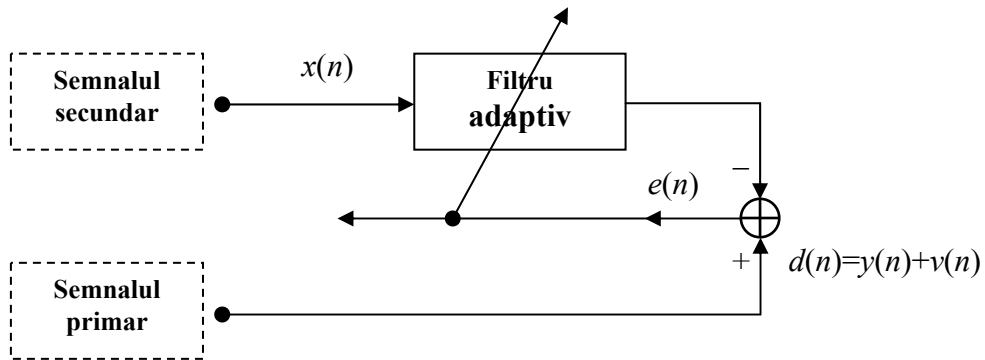


Fig. 1. Suprimarea interferențelor.

Să presupunem că semnalul perturbator $y(n)$ este obținut prin filtrarea semnalului secundar $x(n)$ printr-un filtru cu răspuns finit la impuls, cu L coeficienți reali, ale căror valori sunt conținute în vectorul coloană \mathbf{h} . De asemenea, să presupunem că filtrul adaptiv va avea coeficienți reali, ale căror valori sunt conținute în vectorul $\mathbf{w}(n)$. Cu aceste notații introduse, în figura de mai jos este redesenată schema din Fig. 1. Una din aplicațiile importante ce au la bază schema din Fig. 2 o reprezintă compensarea adaptivă ecoului.

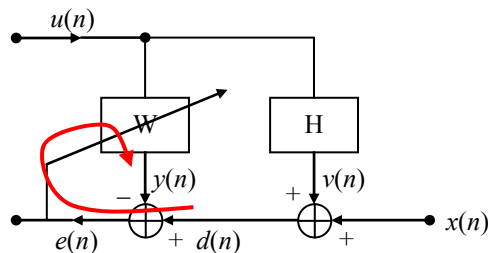


Fig.2. O configurație de suprimare a interferențelor

În [9] este definit fenomenul de scurgere reziduală. Acesta apare în configurația respectivă ca urmare a existenței în semnalul dorit a unei componente $x(n)$ necorelate cu semnalul de intrare, $u(n)$.

Într-o comportare ideală, această componentă nu ar trebui să se regăsească în ieșirea filtrului adaptiv, $y(n)$. În situația reală, când operațiile de mediere nu au loc în mod ideal, o parte din acest semnal trece prin semnalul eroare în $y(n)$. Urmarea este atenuarea semnalului $x(n)$, până la anularea lui totală. În cele ce urmează este prezentată o analiză a acestui fenomen în cazul unui algoritm RLS.

Soluția RLS e dată de ecuația normală:

$$\mathbf{\Phi}(n) \mathbf{w}(n) = \boldsymbol{\theta}(n) \quad (1.1)$$

Sau, cu notațiile obișnuite [10], [11]

$$\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) \mathbf{u}^H(i) \mathbf{w}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) d^*(i) \quad (1.2)$$

$$d(i) = v(i) + x(i) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) v^*(i) + \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v}(i) = \mathbf{h}^H \mathbf{u}(i) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n) &= \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) \mathbf{u}^H(i) \mathbf{h} + \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) = \\ &= \mathbf{h} + \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Teoretic, dacă suma din membrul drept al relației (1.6) ar reprezenta în mod exact corelația dintre $x(n)$ și $u(n)$, cum cele două semnale sunt necorelate, relația de mai sus s-ar reduce la $\mathbf{w}(n) = \mathbf{h}$. Cum suma respectivă este doar un estimat al corelației, ieșirea filtrului adaptat este

$$\mathbf{u}^H(n) \mathbf{w}(n) = \mathbf{u}^H(n) \mathbf{h} + \mathbf{u}^H(n) \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \quad (1.7)$$

$$y^*(n) = v^*(n) + \mathbf{u}^H(n) \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \quad (1.8)$$

$$y^*(n) = v^*(n) + \mathbf{u}^H(n) \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \mathbf{u}(n) x^*(n) + \mathbf{u}^H(n) \mathbf{\Phi}^{-1}(n) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \quad (1.9)$$

Pentru n mare și λ apropiat de 1,

$$\Phi(n) \simeq (1-\lambda)\mathbf{R}^{-1}; \quad \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \simeq \frac{1}{1-\lambda} \mathbf{r}_{ux}(n);$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i) \simeq \frac{\lambda}{1-\lambda} \mathbf{r}_{ux}(n)$$
(1.10)

$$y^*(n) = v^*(n) + (1-\lambda) \mathbf{u}^H(n) \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{u}(n) x^*(n) + \lambda \mathbf{u}^H(n) \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{r}_{ux}(n)$$
(1.11)

Din 1.11, $y(n) = v(n)$ dacă $\lambda = 1$ și $\mathbf{r}_{ux}(n) = \mathbf{0}$.

Dacă λ e mic, încât se pot reține numai primii termeni din cele două sume,

$$\Phi(n) \simeq \mathbf{u}(n) \mathbf{u}^H(n)$$
(1.12)

rămâne

$$y(n) = v(n) + x(n)$$
(1.13)

iar semnalul de la ieșirea schemei va fi nul.

În general, pentru λ mic nu mai sunt valabile aproximările 1.10, deoarece chiar mărinnd n , numărul de termeni semnificativi din sumă rămâne limitat, n_0 și nu mai asigură convergența către valorile medii respective. Formulele 1.8, 1.9 dau o oarecare exprimare cantitativă a fenomenului de scurgere, dar relativ greu de interpretat. Un program matlab (medie1.m) arată de exemplu, că pentru un filtru de lungime $N=50$, alegând $\lambda=0,9$ reziduul din 1.8 (ceea ce se adaugă la $v(n)$) tinde către $x(n)$ dacă $\lambda=0,9$ și către 0, dacă $\lambda=0,999$.

Evident, pentru o funcționare normală, reziduul

$$\mathbf{u}^H(n) \Phi^{-1}(n) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) x^*(i)$$
(1.14)

ar trebui minimizat. Unicul grad de libertate este λ .

Rezultatele unei analize a termenului 1.14 ca funcție de λ și N sunt prezentate în figura 3. Pentru 6 valori ale lungimii filtrului, N , s-a evaluat reziduul, în funcție de parametrul λ . În grafic este reprezentată valoarea medie pătratică a reziduului, normată la puterea semnalului $x(n)$. În abscisă este o reprezentare logaritmică a cantității $1-\lambda$, $-10 \log_{10}(1-\lambda)$. Se constată că la valori mici ale lui λ , reziduul normat este aproape 1, indicând o scurgere aproape totală a semnalului $x(n)$ în ieșirea filtrului adaptiv. Fenomenul este cu atât mai pronunțat cu cât N este mai mare. El se diminuează pe măsură ce λ se apropie de 1. Graficele permit o alegere corectă a lui λ pentru un N dat.

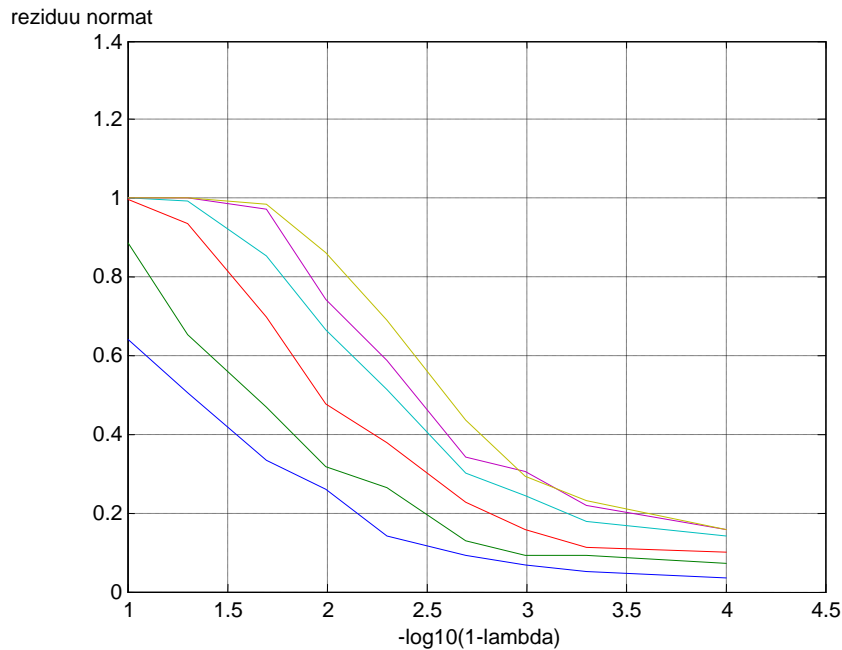


Fig.3. Reziduu normat pentru $N=200,150,100,50,20,10$ (de sus în jos)

2. Un algoritm adaptiv de tip NLMS ameliorat.

Să presupunem că semnalul perturbator $y(n)$ este obținut prin filtrarea semnalului secundar $x(n)$ printr-un filtru cu răspuns finit la impuls, cu L coeficienți reali, ale căror valori sunt conținute în vectorul coloană \mathbf{h} . De asemenea, să presupunem că filtrul adaptiv va avea coeficienți reali, ale căror valori sunt conținute în vectorul $\hat{\mathbf{h}}(n)$. Cu aceste notații introduse, în figura de mai jos este redesenată schema din Fig. 1. Una din aplicațiile importante ce au la bază schema din Fig. 4 o reprezintă compensarea adaptivă ecoului.

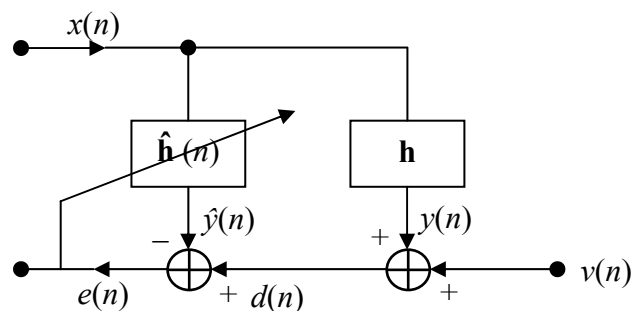


Fig. 4. Configurația de suprimare a interferențelor ce stă la baza aplicației de compensare a ecoului.

Schema din Fig. 4 poate fi privită ca o combinație foarte interesantă între două configurații “clasice” de sisteme adaptive. În primul rând, poate fi considerată o schemă de *identificare de sistem*, în care scopul principal îl reprezintă identificarea sistemului necunoscut \mathbf{h} cu ajutorul filtrului adaptiv $\hat{\mathbf{h}}(n)$. În al doilea rând, schema din Fig. 4 reprezintă

o configurație de *suprimare a interferențelor*, cu rolul reducerii semnalului perturbator $y(n)$ ce afectează semnalul util $v(n)$. Cele două cazuri sunt practic echivalente.

În scopul unei abordări unitare, vom defini semnalele de eroare *a-priori*, respectiv *a-posteriori* astfel:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n) \quad (2.2)$$

unde $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T$, iar T reprezintă operatorul de transpunere.

Relația de reactualizare a coeficienților filtrului adaptiv în cazul algoritmilor de tip LMS (*Least-Mean-Square*) este:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu(n)\mathbf{x}(n)e(n) \quad (2.3)$$

în care $\mu(n)$ reprezintă pasul algoritmului. Introducând expresia lui $\hat{\mathbf{h}}(n)$ din relația (2.3) în relația (2.2) și ținând cont de formula (2.1), rezultă o legătură între cele două tipuri de erori de forma

$$\varepsilon(n) = e(n)[1 - \mu(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)] \quad (2.4)$$

O modalitate de determinare a pasului de adaptare o constituie impunerea condiției de anulare a erorii a-posteriori, $\varepsilon(n) = 0$ (presupunând că $e(n) \neq 0$) [2]. În aceste condiții, din relația (2.4) rezultă că $\mu(n) = 1/[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$. În cazul algoritmului NLMS (*Normalized LMS*), pasul de adaptare este definit ca $\mu(n) = \mu / [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$, cu $0 < \mu < 2$. Prin urmare, valoarea $\mu = 1$ conduce aparent la performanțe optime. Acest lucru este valabil însă doar în situația în care semnalul $v(n)$ este absent. Din Fig. 4 se observă că

$$\varepsilon(n) = \mathbf{x}^T(n)[\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(n)] + v(n) \quad (2.5)$$

Atunci când $v(n) \neq 0$, condiția de anulare a erorii a-posteriori conduce la

$$\mathbf{x}^T(n)[\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(n)] = -v(n) \neq 0 \quad (2.6)$$

ceea ce va afecta estimatul filtrului adaptiv. Prin urmare, forțând anularea erorii a-posteriori $\varepsilon(n)$, se va produce o “scurgere” a semnalului $v(n)$ în coeficienții $\hat{\mathbf{h}}(n)$.

Ținând cont de aceste aspecte, o soluție mai viabilă de determinare a pasului de adaptare a algoritmului o reprezintă impunerea condiției $\varepsilon(n) = v(n)$, în scopul evitării apariției fenomenului de “scurgere” menționat anterior. Astfel, se urmărește ca

$$E\{\varepsilon^2(n)\} = E\{v^2(n)\} \quad (2.7)$$

unde $E\{\cdot\}$ reprezintă operatorul de mediere statistică. Prelucrând relația (4) în acest sens (ridicare la pătrat și mediere statistică) se obține

$$E\{e^2(n)\}[1 - \mu(n)LE\{x^2(n)\}]^2 = E\{v^2(n)\} \quad (2.8)$$

Rezolvând ecuația de gradul 2 precedentă se obține expresia pasului de adaptare

$$\mu(n) = \frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \left[1 - \sqrt{\frac{E\{v^2(n)\}}{E\{e^2(n)\}}} \right] \quad (2.9)$$

Estimarea mărimilor de forma $E\{\alpha^2(n)\}$ se poate realiza într-un mod recursiv astfel:

$$\hat{\sigma}_\alpha^2(n) = \lambda \hat{\sigma}_\alpha^2(n-1) + (1-\lambda)\alpha^2(n) \quad (2.10)$$

unde $\lambda = 1 - 1/(KL)$, cu $K > 1$. Prin urmare, expresia (9) devine

$$\mu(n) = \frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \left[1 - \frac{\hat{\sigma}_v(n)}{\hat{\sigma}_e(n)} \right] \quad (2.11)$$

Acest algoritm cu pas variabil, denumit NPVSS-NLMS (*Nonparametric Variable Step Size NLMS*) a fost propus în [3]. Principala sa limitare constă în faptul că semnalul $v(n)$ este în general indisponibil în practică. În plus, în anumite aplicații (ex: compensarea ecoului) acest semnal poate fi netaționar, conținând atât zgomotul de fond (ce poate varia în timp) cât și vocea vorbitorului de la capătul apropiat (*near-end*), ceea ce complică estimarea puterii sale. Pentru a depăși aceste limitări este de dorit găsirea unei soluții alternative care să evite estimarea directă a semnalului $v(n)$. Se știe că semnalul dorit $d(n)$ al filtrului adaptiv conține atât semnalul $v(n)$, cât și ieșirea sistemului necunoscut, $y(n)$. Cele două secvențe pot fi presupuse necorelate, astfel încât se poate afirma că

$$E\{d^2(n)\} = E\{y^2(n)\} + E\{v^2(n)\} \quad (2.12)$$

În plus, presupunând că filtrul adaptiv a converș într-o anumită măsură vom avea

$$E\{y^2(n)\} \approx E\{\hat{y}^2(n)\} \quad (2.13)$$

Prin urmare, din relațiile precedente rezultă că

$$E\{v^2(n)\} = E\{d^2(n)\} - E\{\hat{y}^2(n)\} \quad (2.14)$$

iar relația (2.11) devine

$$\mu(n) = \frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \left[1 - \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_d^2(n) - \hat{\sigma}_y^2(n)}}{\hat{\sigma}_e(n)} \right] \quad (2.15)$$

Expresia (2.15) este mult mai adecvată în practică deoarece depinde numai de secvențe ce sunt disponibile în mod direct în cadrul aplicației de filtrare adaptivă. Algoritmul VSS-NLMS rezultat a fost propus și analizat în [4] și [5].

O altă modalitate practică de a estima puterea semnalului $v(n)$ constă în aplicarea relației (2.10), pentru semnalul eroare $e(n)$, utilizând însă un parametru $\gamma > \lambda$ [6]:

$$\hat{\sigma}_v^2(n) = \gamma \hat{\sigma}_v^2(n-1) + (1-\gamma)e^2(n) \quad (2.16)$$

În continuare sunt prezentate rezultatele unor simulări efectuate în cadrul unei configurații de compensare a ecoului acustic [7]. Au fost comparate performanțele algoritmilor NLMS clasic, NPVSS-NLMS [3], VSS-NLMS-1 [bazat pe relația (2.15)], VSS-NLMS-2 [bazat pe relația (2.16)] și VSS-NLMS-id [“ideal” - în care se presupune că semnalul $v(n)$ este disponibil]. Sistemul “necunoscut” (calea de ecou acustic) are lungimea $L = 512$, egală cu cea a filtrului adaptiv. Semnalul de intrare $x(n)$ este o secvență vocală, frecvența de eșantionare fiind $F_s = 8$ kHz.

Într-un prim experiment, semnalul $v(n)$ constă doar în zgomotul de fond (cazul *single-talk*), cu $\text{SNR} = 20\text{dB}$. Rezultatele sunt prezentate în Fig. 5. Se observă că algoritmul NPVSS-NLMS (în care se presupune cunoscută puterea zgomotului de fond) este practic similar cu cazul “ideal”, iar algoritmul VSS-NLMS-1 obține performanțe apropiate. Viteza de convergență se reduce însă în cazul algoritmului VSS-NLMS-2.

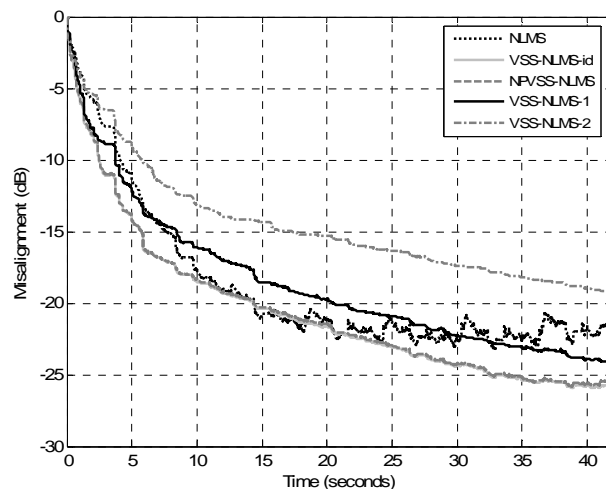


Fig. 5. Performanțele algoritmilor de tip VSS-NLMS în cazul *single-talk*.

În cel de al doilea experiment, pe lângă zgomotul de fond este prezentă și vocea vorbitorului de la capătul apropiat (cazul *double-talk*). Rezultatele sunt prezentate în Fig. 6, fiind evidentă superioritatea algoritmului VSS-NLMS-1.

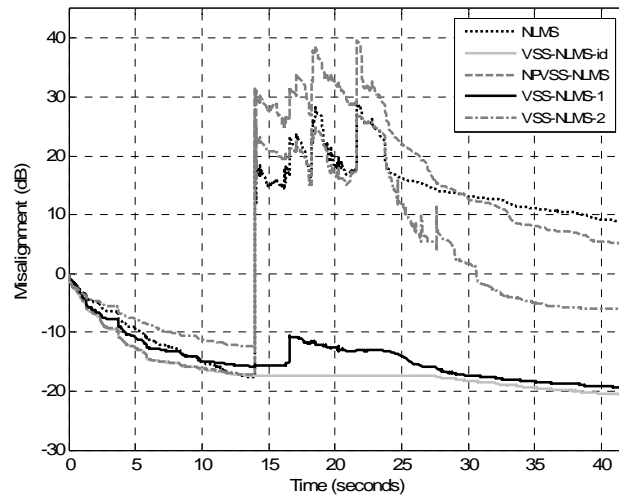


Fig. 6. Performanțele algoritmilor de tip VSS-NLMS în cazul *double-talk*.

Ideea de bază a acestei categorii de algoritmi VSS-NLMS poate fi extinsă și asupra algoritmilor de tip RLS (*Recursive-Least-Squares*) [8]. Parametrul de ponderare exponențială al algoritmilor RLS influențează fenomenul de “scurgere” menționat anterior într-o măsură oarecum asemănătoare cu pasul de adaptare μ al algoritmilor NLMS.

Bibliografie

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Fourth ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [2] D. R. Morgan, S. G. Kratzer, “On a class of computationally efficient, rapidly converging, generalized NLMS algorithms”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 3, no. 8, pp. 245–247, Aug. 1996.
- [3] J. Benesty, H. Rey, L. Rey Vega, S. Tressens, “A nonparametric VSS NLMS algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, no. 10, pp. 581–584, Oct. 2006.
- [4] C. Paleologu, S. Ciochină, J. Benesty, “Variable step-size NLMS algorithm for under-modeling acoustic echo cancellation”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, pp. 5–8, 2008.
- [5] C. Paleologu, S. Ciochină, J. Benesty, “Double-talk robust VSS-NLMS algorithm for under-modeling acoustic echo cancellation”, in *Proc. IEEE ICASSP 2008*, Las Vegas, U.S.A., Apr. 2008, pp. 245–248.
- [6] C. Paleologu, S. Ciochină, “A class of variable step-size NLMS and affine projection algorithms suitable for echo cancellation”, in *Proc. ISETC 2008*, Timișoara, Sept. 2008, pp. 118-123.
- [7] J. Benesty, T. Gaensler, D. R. Morgan, M. M. Sondhi, S. L. Gay, *Advances in Network and Acoustic Echo Cancellation*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001.
- [8] C. Paleologu, J. Benesty, S. Ciochină, “A robust variable forgetting factor recursive least-squares algorithm for system identification”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, pp. 597-600, 2008.
- [9] S. Ciochină, C. Paleologu, A.A. Enescu, Algoritmi RLS în configurația de suprimare a interferențelor. Fenomenul de scurgere a semnalului uyl în ieșirea filtrului adaptiv, *Rev. Telecomunicații*, nr.2,2004, pag. 15-24.
- [10] S. Ciochină, C. Negrescu, *Sisteme adaptive*, Ed. Tehnică, București,1999.
- [11] C. Paleologu, S. Ciochină, A.A. Enescu, *Algoritmi adaptive de tip RLS*, Ed. Printech, București, 2007