



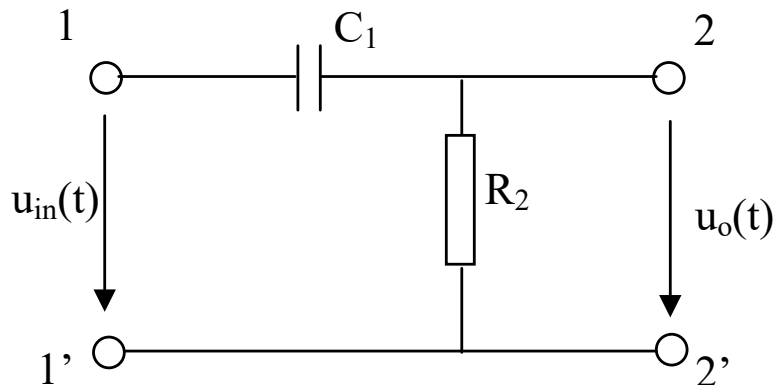
3. Măsurarea tensiunilor și a curenților electrici

3.1 Aspecte generale



Caracteristica de frecvență

■ Exemplu: *Circuitul RC de derivare*



$$\underline{U}_o = \underline{U}_{in} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} =$$

$$= U_{in} \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} =$$

$$= U_{in} \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{j\omega C_1 R_2}{1 + j\omega C_1 R_2}$$

$$= U_{in} \cdot \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_2)^2}} \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega C_1 R_2)\right)}$$



Circuitul RC de derivare

- $\underline{|U_0|} = f(\omega)$ și $\arg \underline{|U_0|} = f(\omega)$

$$\underline{U_0} = U_{in} \cdot \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_2)^2}} \cdot e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega C_2 R_1)\right)}$$

$$U_o = U_{in} \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$$

$$\varphi_o = \varphi + \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega \tau)$$

- $\tau = C_1 R_2$



Circuitul RC de derivare

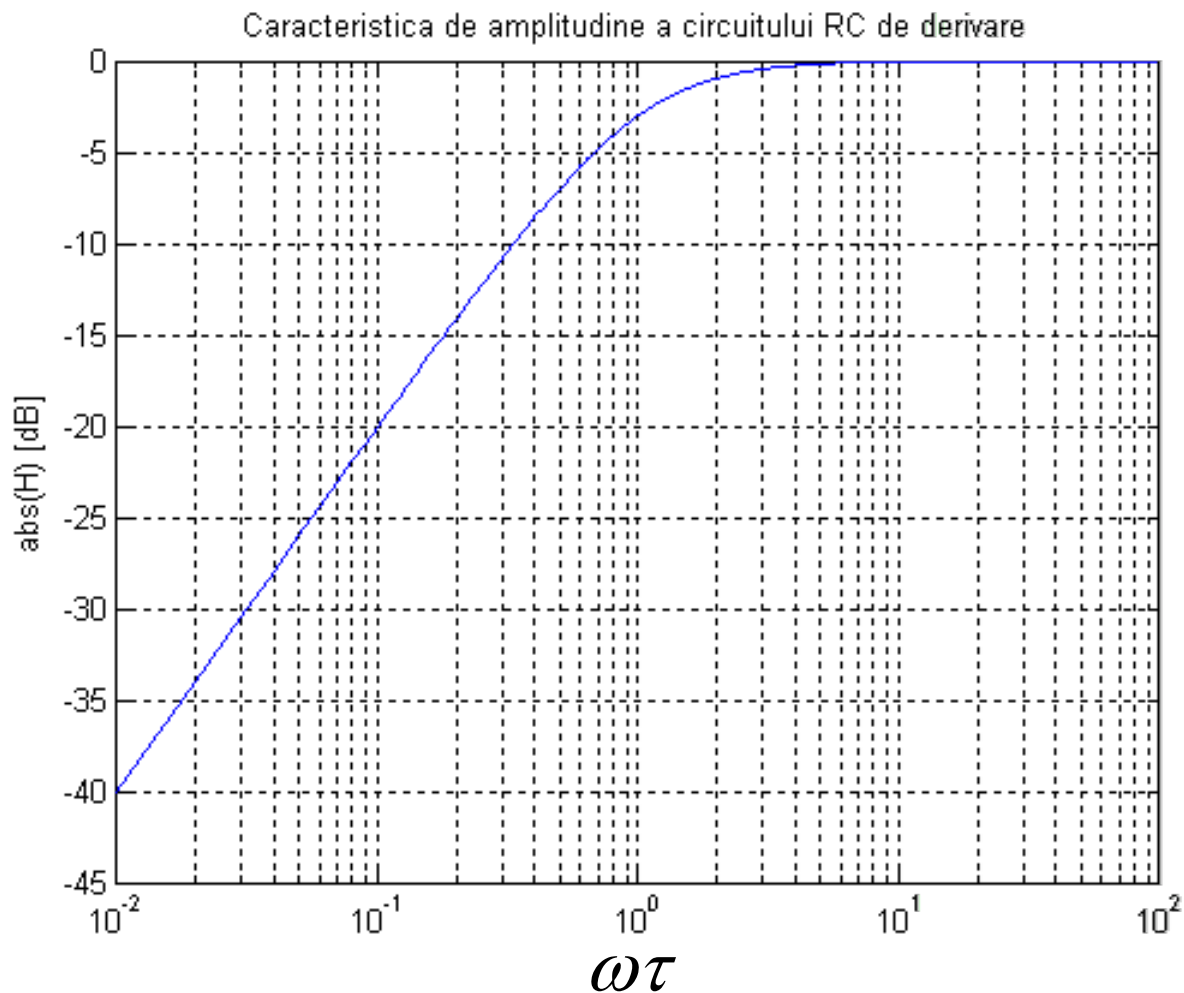
- Funcția de transfer în tensiune:

$$H(\omega) = T_U = \frac{U_o}{U_{in}} = \frac{U_o}{U_{in}} \cdot e^{j(\varphi_o - \varphi)} = \frac{\omega C_1 R_2}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_2)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega C_1 R_2)\right)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \arg\{H(\omega)\} = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega\tau)$$



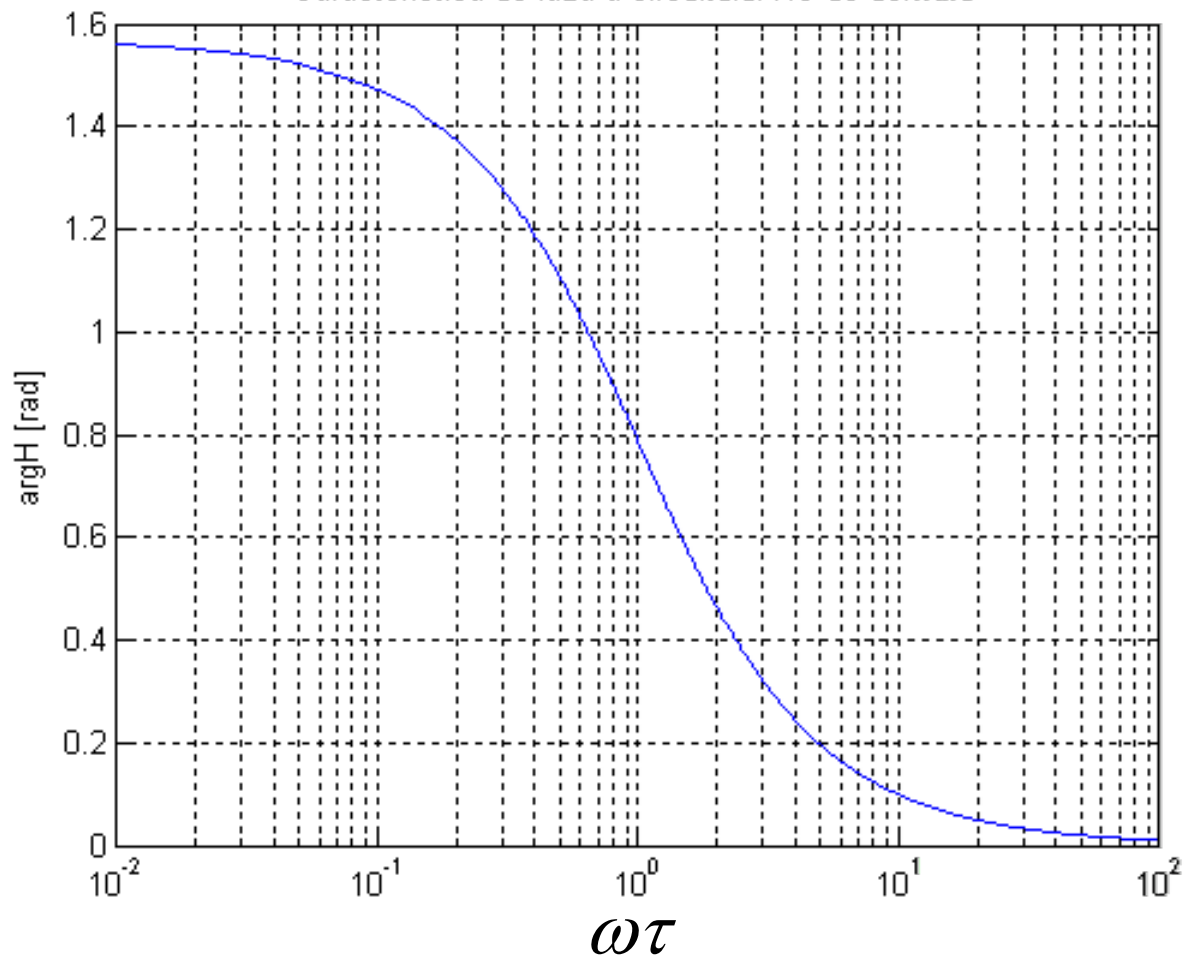
Circuitul RC de derivare





Circuitul RC de derivare

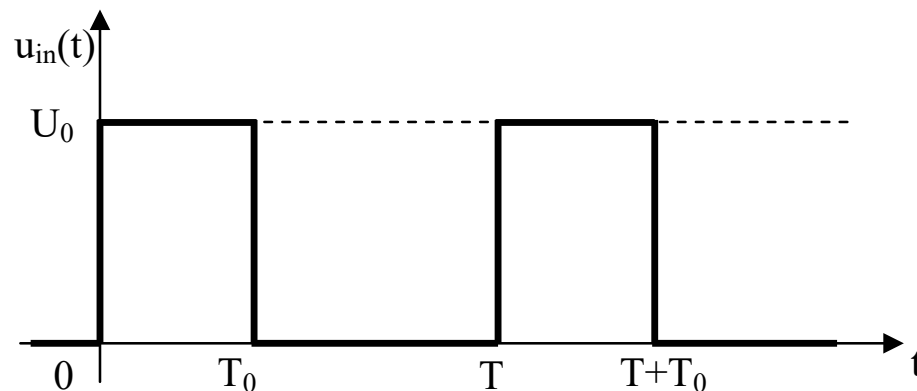
Caracteristica de faza a circuitului RC de derivare





Circuitul RC de derivare

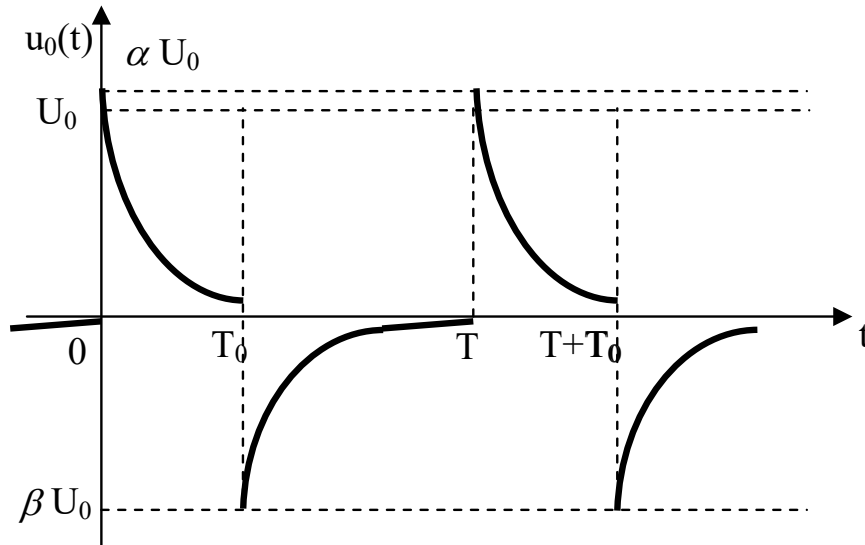
- Dacă la intrarea circuitului RC de derivare se aplică:
- La ieșire se obține:



$$u_0(t) = \begin{cases} U_0 \frac{1 - e^{-\frac{t-kT}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} & ; \quad kT \leq t < kT + T_0 \\ -U_0 \frac{e^{\frac{T_0}{\tau}} - 1 - e^{-\frac{T-T_0}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t-kT}{\tau}} & ; \quad kT + T_0 \leq t < (k+1)T \end{cases} ; \quad k \in \mathbf{Z}$$



Circuitul RC de derivare



$$\alpha = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

$$\beta = -\frac{1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

- ptr. $\tau \ll T_0 \rightarrow \alpha=1, \beta=-1$
- **impulsuri ideale** la salturi de nivel $\rightarrow$ **circuit de derivare**



Erori de măsură

- Operația de măsurare poate fi caracterizată prin
 - metodă de măsură,
 - aparat de măsură
 - valoare măsurată
 - eroare de măsură
- două aparate identice, aceeași metodă → erori diferite
- *eroare de măsură* = valoarea măsurată – valoarea adevărată



Erori de măsură

■ *Cauze*

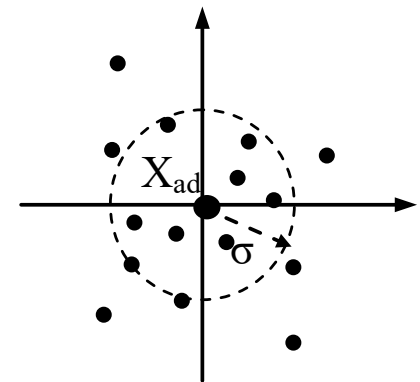
- **Obiectul de măsură** → erori de model
 - Ex: măsurarea unui condensator la o anumită frecvență
- **Aparatul de măsură** → erorilor instrumentale
- **Interacțiunea aparat de măsură obiect de măsură** → erorilor de interacțiune
 - Ex: măsurarea cu un ampermetru
- **Influențe externe** → erorilor de influență
 - Factorii de influență **obiectivi**
 - Factorii de influență **subiectivi**



Modul de manifestare al erorilor

■ **Erori aleatoare**

- diferă de la o măsurătoare la alta.
- orice valoare într-un interval dat, în jurul valorii adevărate
- Reducere: măsurători multiple + mediere



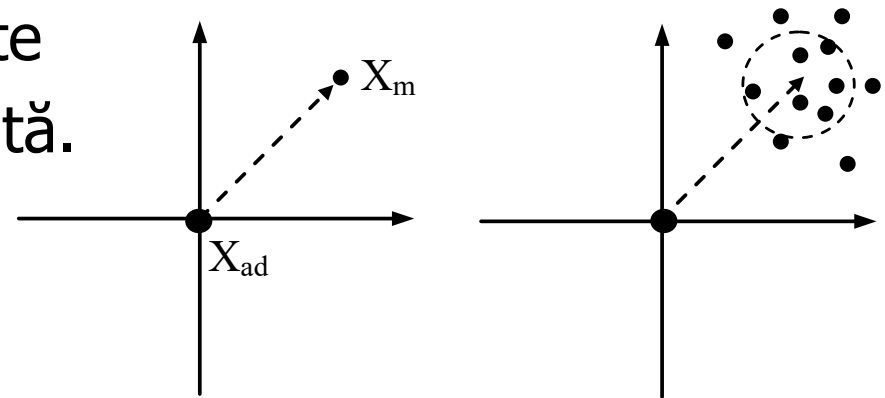
a) Erori aleatoare



Modul de manifestare al erorilor

■ **Erori sistematice**

- erori care se manifestă în același mod la repetarea măsurătorii.
- datorate de obicei erorilor de model sau erorilor de interacțiune.
- decalarea valorii măsurate față de valoarea adevărată.



b) Erori sistematice

c) Erori
aleatoare + sistematice



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Eroarea absolută

$$e = X_m - X_{ad}$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- **Eroarea absolută limită**
 - eroarea absolută maximă
 - caracterizează procesul de măsură
 - se notează cu e_l sau e_{lim}

$$e_{lim}^{not} = \max |e| = \max |X_m - X_{ad}|$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Eroarea relativă

$$\varepsilon = \frac{e}{X_{ad}} = \frac{X_m - X_{ad}}{X_{ad}} \cong \frac{e}{X_m}$$

- În procente [%] sau părți per milion [*ppm*]
- ε sau ε_r



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Eroarea relativă limită

- eroarea relativă maximă
- caracterizează procesul de măsură respectiv

$$\varepsilon_{\text{lim}} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{e_{\text{lim}}}{X_{ad}} = \frac{\max |X_m - X_{ad}|}{X_{ad}} \approx \frac{e_{\text{lim}}}{X_m}$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Eroarea raportată

$$e_R = \frac{e}{X_R} = \frac{X_m - X_{ad}}{X_R}$$

- X_R - valoare particulară a măsurandului
- în procente [%] sau părți per milion [*ppm*]



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Eroarea raportată limită

- eroarea raportată maximă

$$e_{R \text{ lim}} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{e_{\text{lim}}}{X_R} = \frac{\max |X_m - X_{ad}|}{X_R} = \max |e_R|$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- **EXEMPLU:** Se măsoară o tensiune de 8V cu ajutorul unui voltmetru care are o valoare de cap de scară de 10V.
 - Voltmetrul indică valoarea 8,05 V. Să se calculeze eroarea absolută, eroarea relativă și eroarea raportată făcută la această măsurătoare.
 - Se repetă măsurătoarea de mai multe ori și se obțin pentru tensiune valori cuprinse în intervalul $(7,9 \div 8,08)$ V. Să se calculeze eroarea absolută limită, eroarea relativă limită și eroarea raportată limită.



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- eroarea absolută:

$$e = 8,05V - 8V = 0,05V$$

- eroarea relativă:

$$\varepsilon = \frac{e}{U_{ad}} = \frac{0,05}{8} \cdot 100[\%] = 0,625[\%]$$

- eroarea raportată:

$$e_R = \frac{e}{U_R} = \frac{0,05}{10} \cdot 100[\%] = 0,5[\%]$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- eroarea absolută limită:

$$e_{\text{lim}} = \max |U_m - U_{ad}| = |7,9 - 8| = 0,1V$$

- eroarea relativă limită:

$$\varepsilon_{\text{lim}} = \frac{e_{\text{lim}}}{U_{ad}} = \frac{0,1}{8} \cdot 100[\%] = 1,25[\%]$$

- eroarea raportată limită:

$$e_{R \text{ lim}} = \frac{e_{\text{lim}}}{U_R} = \frac{0,1}{10} \cdot 100[\%] = 1[\%]$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- se preferă *eroarea relativă*
- oferă o imagine mai bună asupra preciziei unei măsurători.
 - **Exemplu:** se poate obține o eroare absolută de 1V la măsurarea unei tensiuni de 100 V și respectiv la măsurarea unei tensiuni de 4V.

$$e_1 = e_2 = 1V$$

$$\varepsilon_1 = \frac{e}{U_{ad_1}} = 1\%$$

$$\varepsilon_2 = \frac{e}{U_{ad_2}} = 25\%$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

■ Clasa de precizie

- se definește pentru aparatele de măsură
- eroare raportată când $X_R = X_{CS}$

$$c = e_{R \lim} \Big|_{X_R = X_{CS}} \stackrel{not}{=} \frac{e_{\lim}}{X_{CS}} \cdot 100 \quad [\%]$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\lim} = \frac{e_{\lim}}{X} = \frac{c \cdot X_{CS}}{X} \quad [\%]$$



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- Clasa de precizie reprezintă eroarea relativă limită minimă pe care o face aparatul respectiv.
- **EXEMPLU:** Se dispune de trei voltmetre având următoarele scări și clase de precizie:
 - Voltmetrul 1 are $U_{CS1}=100V$, $c_1=4\%$;
 - Voltmetrul 2 are $U_{CS2}=1000V$, $c_2=0,5\%$;
 - Voltmetrul 3 are $U_{CS3}=300V$ și $c_3=2\%$.
- Să se aleagă aparatul care măsoară o tensiune $U=100V$ cu eroare relativă limită minimă.



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- eroarea relativă limită

$$\varepsilon_{\text{lim},1} = \frac{c_1 \cdot U_{\text{CS1}}}{U} = 4\%$$

$$\varepsilon_{\text{lim},2} = 5\%$$

$$\varepsilon_{\text{lim},3} = 6\%$$

→ voltmetrul 1



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

$$\varepsilon_{\text{lim}} = \frac{e_{\text{lim}}}{X} = \frac{c \cdot X_{CS}}{X} \sim \frac{1}{X} \text{ (hiperbolă)}$$

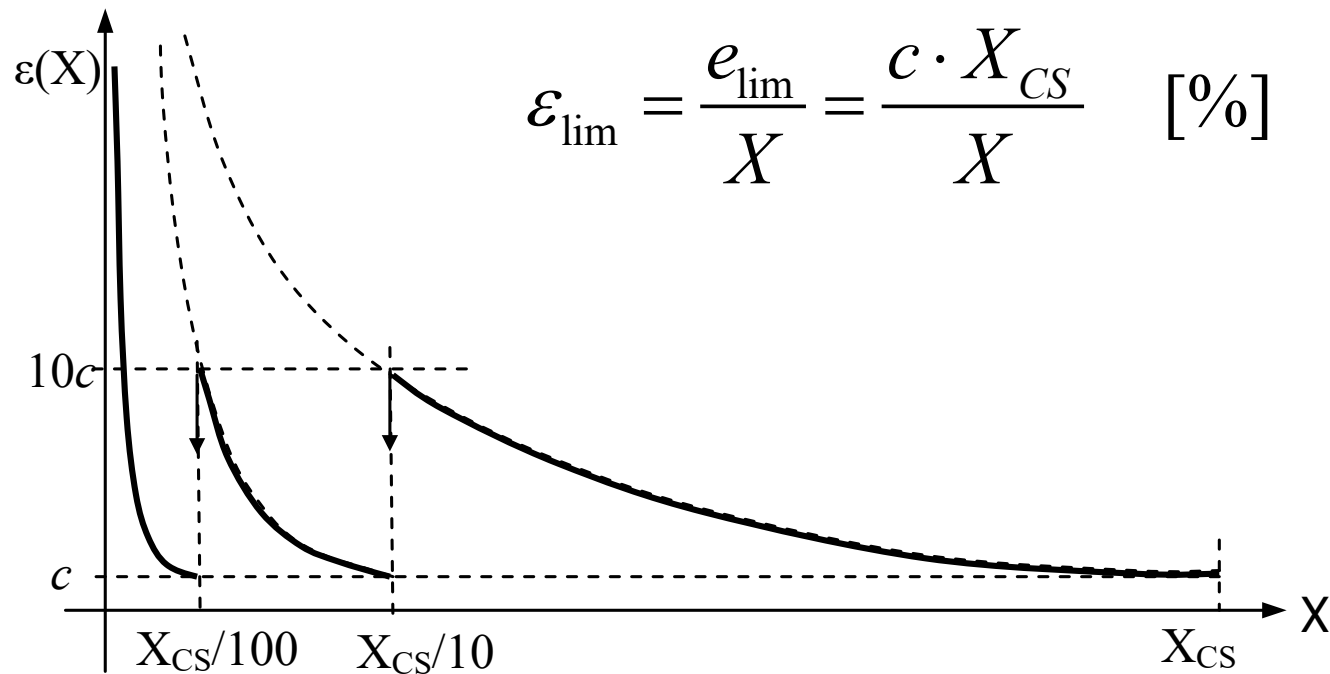
■ X mic $\rightarrow \varepsilon_{\text{lim}}$ foarte mari

$\rightarrow$ aparate cu scări de măsură multiple



Caracterizarea cantitativă a erorilor de măsură

- Variația erorii pentru un aparat având scări comutabile decadic (de exemplu un voltmetru care are scările $U_{CS}=100V$, $U_{CS1}=U_{CS}/10=10V$, $U_{CS2}=1V$, ...).





Propagarea erorilor în măsurătorile indirecte

$$Y = f(X_1, X_2 \dots X_n)$$

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ caracterizate prin
 - $e_{lim,1}, e_{lim,2}, \dots, e_{lim,n}$
 - $\varepsilon_{lim,1}, \varepsilon_{lim,2}, \dots, \varepsilon_{lim,n}$
- dorim determinarea erorii lui Y



Propagarea erorilor în măsurătorile indirecte

$$dY = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$$

- ecuația cu diferențe finite:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i$$

$$\Rightarrow e_{\text{lim},Y} = |\Delta Y|_{\text{max}} = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i \right|_{\text{max}} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| |\Delta X_i|_{\text{max}}$$



Propagarea erorilor în măsurătorile indirecte

$$e_{\text{lim},Y} = |\Delta Y|_{\text{max}} = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} \Delta X_i \right|_{\text{max}} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| |\Delta X_i|_{\text{max}}$$

- Dar $|\Delta X_i|_{\text{max}} = e_{\text{lim},i}$

- La limită :

$$e_{\text{lim},Y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \cdot e_{\text{lim},i}$$

- Pentru calculul erorii relative

$$\varepsilon_{\text{lim},Y} = \frac{e_{\text{lim},Y}}{Y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} \right| \cdot \frac{e_{\text{lim},i}}{X_i} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y} \right| \cdot \varepsilon_{\text{lim},i}$$



Propagarea erorilor în măsurătorile indirecte

■ **EXEMPLU:**

- Se calculează puterea disipată de o rezistență $R=1\text{k}\Omega$, parcursă de un curent $I=2\text{mA}$.
- Rezistența are toleranța: $\varepsilon_{\text{lim},R} = 1\%$
- Curentul este măsurat cu un miliampermetru având clasa de precizie $c=0,5\%$ și $I_{CS}=10\text{mA}$.
- Să se calculeze eroarea relativă limită cu care este determinată puterea disipată.

■ Determinare indirectă a puterii

$$P = R \cdot I^2$$



Propagarea erorilor în măsurătorile indirecte

$$P = R \cdot I^2$$

- eroarea relativă:

$$\varepsilon_{\text{lim},P} = \left| \frac{\partial P}{\partial R} \frac{R}{P} \right| \varepsilon_{\text{lim},R} + \left| \frac{\partial P}{\partial I} \frac{I}{P} \right| \varepsilon_{\text{lim},I} = \frac{I^2 R}{P} \varepsilon_{\text{lim},R} + 2I \cdot R \frac{I}{P} \varepsilon_{\text{lim},I}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{lim},P} = \varepsilon_{\text{lim},R} + 2 \cdot \varepsilon_{\text{lim},I}$$

- dar $\varepsilon_{\text{lim},I} = \frac{c \cdot I_{CS}}{I} = 2,5\%$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{lim},P} = 1\% + 5\% = 6\%$$



Clasificarea aparatelor de măsură

- După mărimea de măsurat:
 - aparate pentru măsurarea **tensiunilor** electrice;
 - aparate pentru măsurarea **intensității** curenților electrice
 - aparate pentru măsurarea altor **mărimi derivate**
 - aparate **mixte** (multimetre)



Clasificarea aparatelor de măsură

- După metoda de măsură:
 - aparate pentru măsurare **directă** a mărimii de măsurat;
 - aparate pentru măsurarea prin **compensare**;



Clasificarea aparatelor de măsură

- După tehnologia de realizare a aparatelor de măsură:
 - aparate de măsură **analogice**
 - aparate **electromecanice**, care transformă mărimea de măsurat într-o mărime observabilă
 - **compensatoare**
 - aparate electronice care **amplifică** semnalul de măsurat prin mijloace electronice
 - aparate de măsură **numerice**



Clasificarea aparatelor de măsură

- După tipul și frecvența semnalului de măsurat:
 - aparate de măsură în **curent continuu**;
 - aparate de măsură în **curent alternativ**:
 - de **joasă** frecvență (audiofrecvență);
 - de **înaltă** frecvență (radiofrecvență);



Parametrii semnalelor alternative, periodice

- Se consideră un semnal periodic, de perioadă T

$$x(t) = x(t + kT)$$

- Se pot defini următoarele mărimi:

- **Valoarea de vârf**

$$U_{V+}, U_{V-}$$

- **Valoarea vârf la vârf**

$$U_{VV} = U_{V+} - U_{V-}$$



Parametrii semnalelor alternative, periodice

- **Valoarea medie** – sau componenta continuă a semnalului

$$\overline{u(t)} = U_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

- indicată de un instrument magnetoelectric

- **Valoarea medie absolută**

$$U_{ma} = \overline{u_r(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_r(t) dt$$



Parametrii semnalelor alternative, periodice

- În cazul *redresării dublă alternanță*:

$$u_r(t) = |u(t)| \Rightarrow U_{ma} = \overline{|u(t)|}$$

- În cazul *redresării monoalternanță* +

$$u_r(t) = u_+(t) = \frac{1}{2}(u(t) + |u(t)|) \Rightarrow U_{ma+} = \overline{u_+(t)}$$

- În cazul *redresării monoalternanță* -

$$u_r(t) = u_-(t) = \frac{1}{2}(u(t) - |u(t)|) \Rightarrow U_{ma-} = \overline{u_-(t)}$$



Parametrii semnalelor alternative, periodice

- **Valoarea eficace** – (Root Mean Square)

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$$



Parametrii semnalelor alternative, periodice

- **Factorul de vârf**

$$K_V = \frac{U_V}{U_{ef}}$$

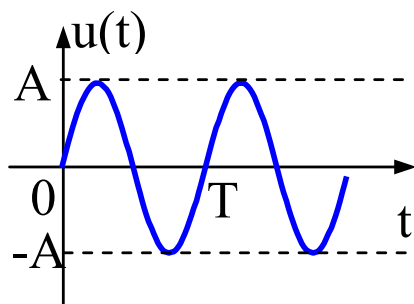
- **Factorul de formă**

$$K_F = \frac{U_{ef}}{U_{ma}}$$

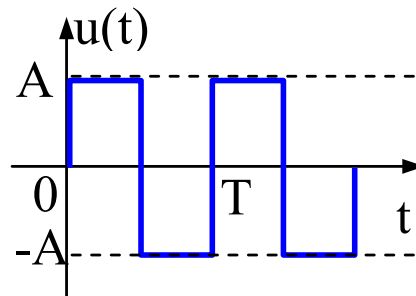


Parametrii semnalelor alternative, periodice

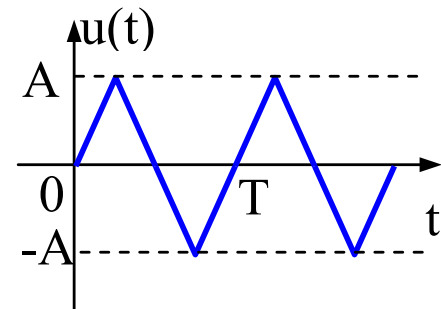
- **EXEMPLU:** Să se calculeze tensiunea medie, tensiunea medie absolută, tensiunea efectivă, factorul de vârf și factorul de formă pentru următoarele tipuri de semnale: sinusoidal, dreptunghiular simetric, triunghiular simetric



a) Semnal sinusoidal



b) Semnal dreptunghiular
simetric



c). Semnal triunghiular
simetric

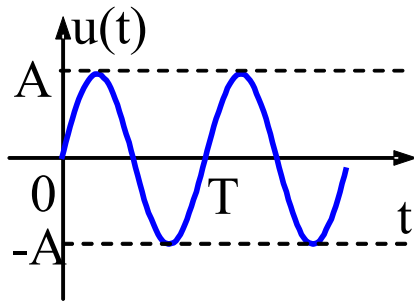


Parametrii semnalelor alternative, periodice

■ Semnal sinusoidal:

$$U_{ma} = \frac{2A}{\pi}$$

$$U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$



$$U_{ma} = \overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt} = \sqrt{x^2(t)}$$

$$K_V = \sqrt{2}$$

$$K_V = \frac{U_V}{U_{ef}}$$

$$K_F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

$$K_F = \frac{U_{ef}}{U_m}$$

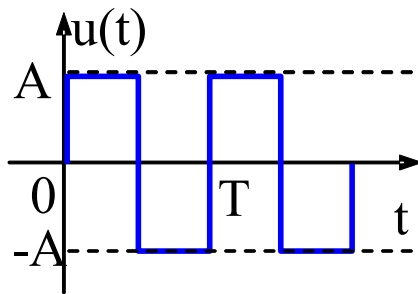


Parametrii semnalelor alternative, periodice

- Semnal dreptunghiular simetric:

$$U_{ma} = A$$

$$U_{ef} = A$$



$$U_{ma} = \overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt} = \sqrt{x^2(t)}$$

$$K_V = 1$$

$$K_V = \frac{U_V}{U_{ef}}$$

$$K_F = 1$$

$$K_F = \frac{U_{ef}}{U_m}$$

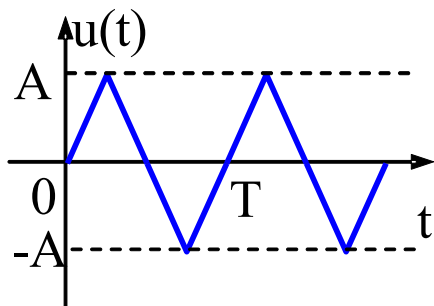


Parametrii semnalelor alternative, periodice

- Semnal triunghiular simetric:

$$U_{ma} = \frac{A}{2}$$

$$U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$



$$U_{ma} = \overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(t)| dt$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt} = \sqrt{x^2(t)}$$

$$K_V = \sqrt{3}$$

$$K_V = \frac{U_V}{U_{ef}}$$

$$K_F = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$K_F = \frac{U_{ef}}{U_m}$$