

3. Măsurarea tensiunilor și a curenților electrici



3.1 Aspecte generale



Procesul de măsurare

- A măsura:

$$X = m \cdot X_u$$

- m
- X_u
- X



Procesul de măsurare

- **Eroare** datorită
 - imperfecțiunii aparatului de măsură
 - operatorului
 - prezenței unor factori perturbatori

→ Precizia măsurării



Unitatea de măsură

- SI are 7 unități fundamentale:
 - metrul – m pentru distanță,
 - kilogramul – kg pentru masă,
 - secunda – s pentru timp,
 - amperul – A pentru curentul electric,
 - gradul Kelvin – K pentru temperatură,
 - candela – cd pentru intensitatea luminoasă,
 - molul – mol pentru cantitatea de substanță
- și unitățile derivate conform legilor fizicii.



Unitatea de măsură

- Amperul (A) se definește ca:
 - intensitatea unui curent electric constant care, menținut în două conductoare paralele, rectilinii, cu lungime infinită, așezate în vid la o distanță de 1 m unul de altul, ar produce între aceste conductoare o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.
- Voltul (V), ca unitate de măsură derivată pentru tensiune, se definește ca:
 - diferența de potențial ce se stabilește între două puncte ale unui fir conductor parcurs de un curent electric constant de 1 A, când puterea disipată între aceste două puncte este egală cu 1 W.



Unități de măsură de nivel

- Anumite măsurători prin **comparație cu o valoare de referință** a mărimii respective.
 - raportare la un nivel de referință.
 - **valoarea raportului și valoarea referinței.**



Unități de măsură de nivel

- raportare percepută conform unei **legi neliniare**.
- De exemplu:
 - **nivelul sonor perceput**
 - urechea umană - **caracteristică neliniară** (logaritmică)
 - percepția intensității sonore variază diferit la variația intensității sonore



Unități de măsură de nivel

- nivelul

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}}$$

- în decibeli (dB)
- Graham Bell



Unități de măsură de nivel

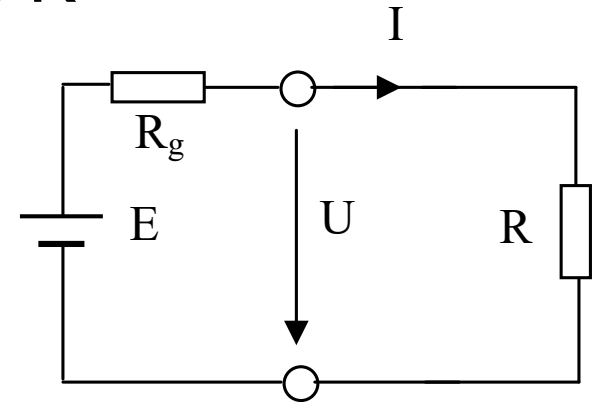
- **scări logaritmice**
- măsurare în raport cu o mărime de referință de aceeași natură
- rezultat în **dB**
- valabil pentru P în orice situație
- U pe Z_{ref} , I prin Z_{ref}
 - U_{ref} pe Z_{ref} , I_{ref} prin Z_{ref}



Unități de măsură de nivel

- Exemplu: nivelul P disipate pe R

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} \quad [dB]$$



- În cazul unui curent continuu prin R :

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}; \quad P_{ref} = R \cdot I_{ref}^2 = \frac{U_{ref}^2}{R}$$



Unități de măsură de nivel

- În cazul unui curent alternativ:

$$P = \frac{R \cdot I^2}{2} = \frac{U^2}{2R}; \quad P_{ref} = \frac{R \cdot I_{ref}^2}{2} = \frac{U_{ref}^2}{2R}$$

- Rezultă:

$$n = 20 \log_{10} \frac{U}{U_{ref}} = 20 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} \quad [dB]$$



Unități de măsură de nivel

- dacă mărimea de referință se măsoară pe o alta rezistență (notată R_{ref}), atunci:

$$\begin{aligned} n &= 20 \log_{10} \frac{U}{U_{ref}} - 10 \log_{10} \frac{R}{R_{ref}} = \\ &= 20 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} + 10 \log_{10} \frac{R}{R_{ref}} \quad [dB] \end{aligned}$$



Unități de măsură de nivel

- În comunicații $P_{ref} = 1mW$
- dBm („decibel raportat la 1 mW”)
- **Exemplu:** o stație radio are nivelul puterii de emisie de 40 dBm dacă aceasta este

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 40 \text{ dBm}$$

$$\Rightarrow P = P_{ref} \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10000mW = 10W$$



Unități de măsură de nivel

- În telefonie $R_{ref} = 600\Omega$
 - ptr. $P_{ref} = 1 \text{ mW}$:

$$U_{ref} = \sqrt{R_{ref} \cdot P_{ref}} = 0,775V$$

- În radiocomunicații $R_{ref} = 50\Omega$,
 - ptr. $P_{ref} = 1 \text{ mW}$:

$$U_{ref} = \sqrt{R_{ref} \cdot P_{ref}} = 0,224V$$



Unități de măsură de nivel

- Neperul (Np)

$$n = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_{ref}} \quad [Np]$$

- Măsurare U prin R:

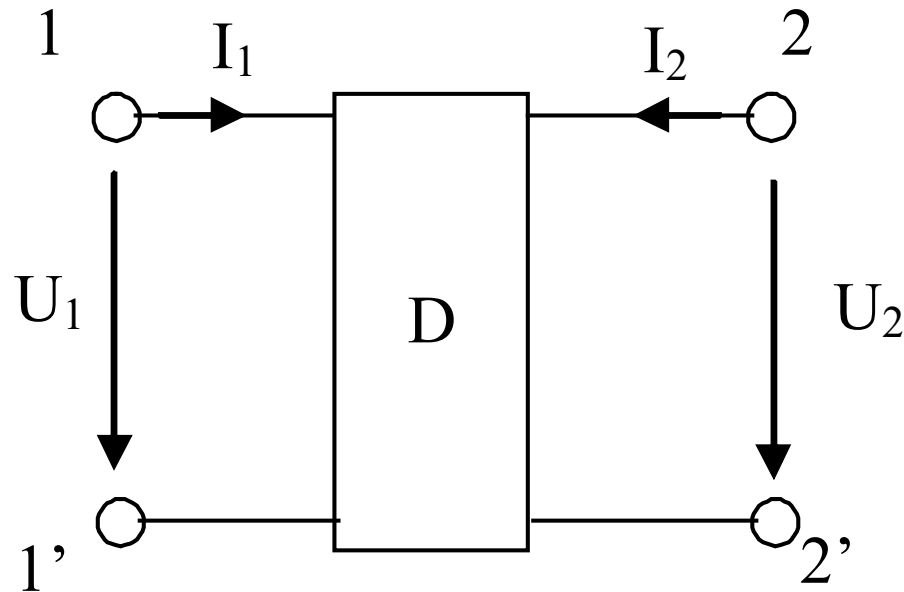
$$n = \ln \frac{U}{U_{ref}} = \ln \frac{I}{I_{ref}} \quad [Np]$$

- 1 Np = 8,686 dB



Diporți

- Diport (cuadripol)

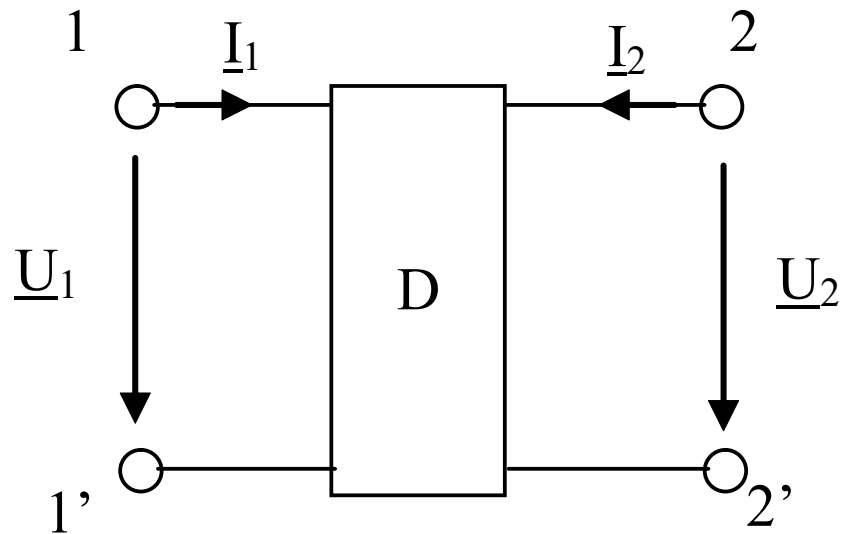


- U, I pot fi măsurate chiar dacă nu se cunoaște structura de circuit a diportului



Diporți

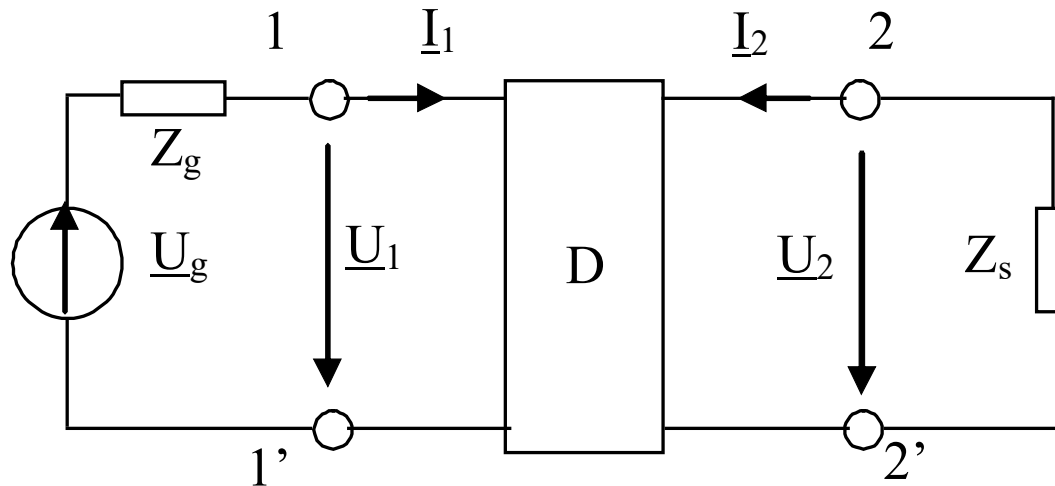
- D alimentat în **curent alternativ** la o frecvență dată → **fazori** \underline{U} , \underline{I}





Diporți

- Intrare - **sursă** (un generator) de semnal
- ieșire - **impedanță de sarcină Z_s** , care poate fi și impedanța de intrare într-un alt etaj



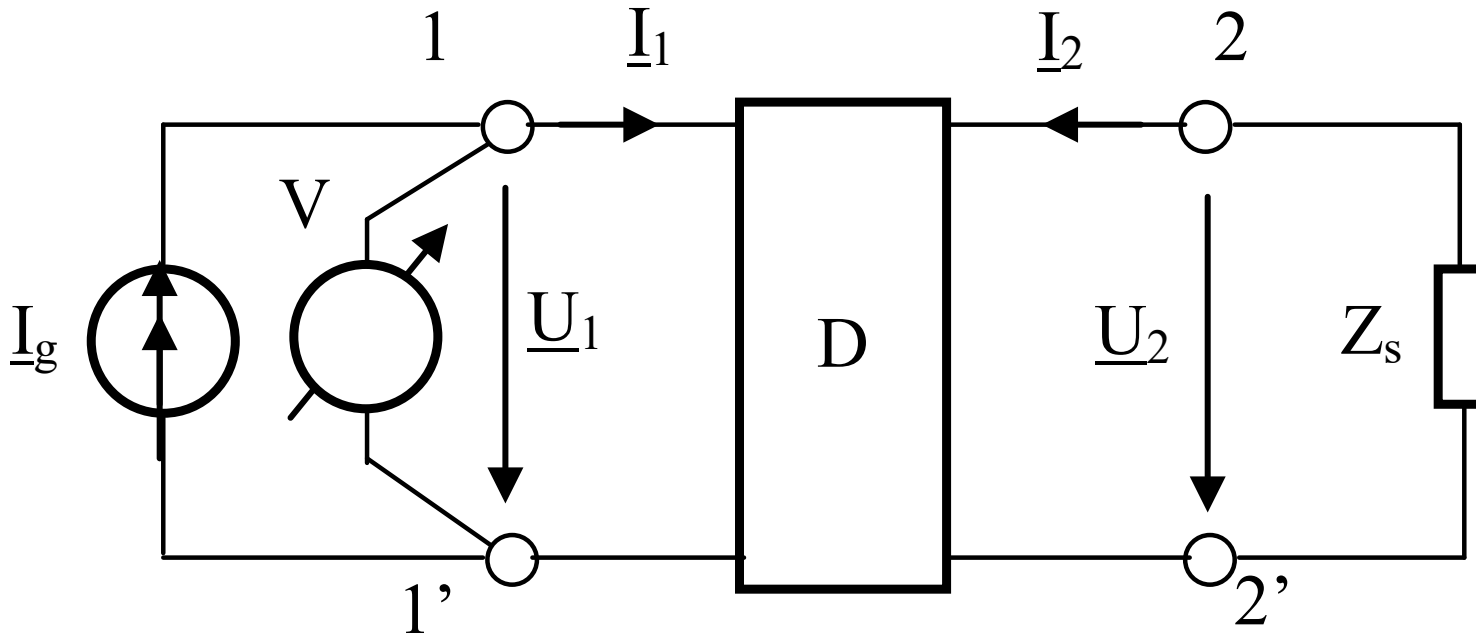
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_g - \underline{I}_1 \cdot Z_g$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot Z_s$$



Diporți

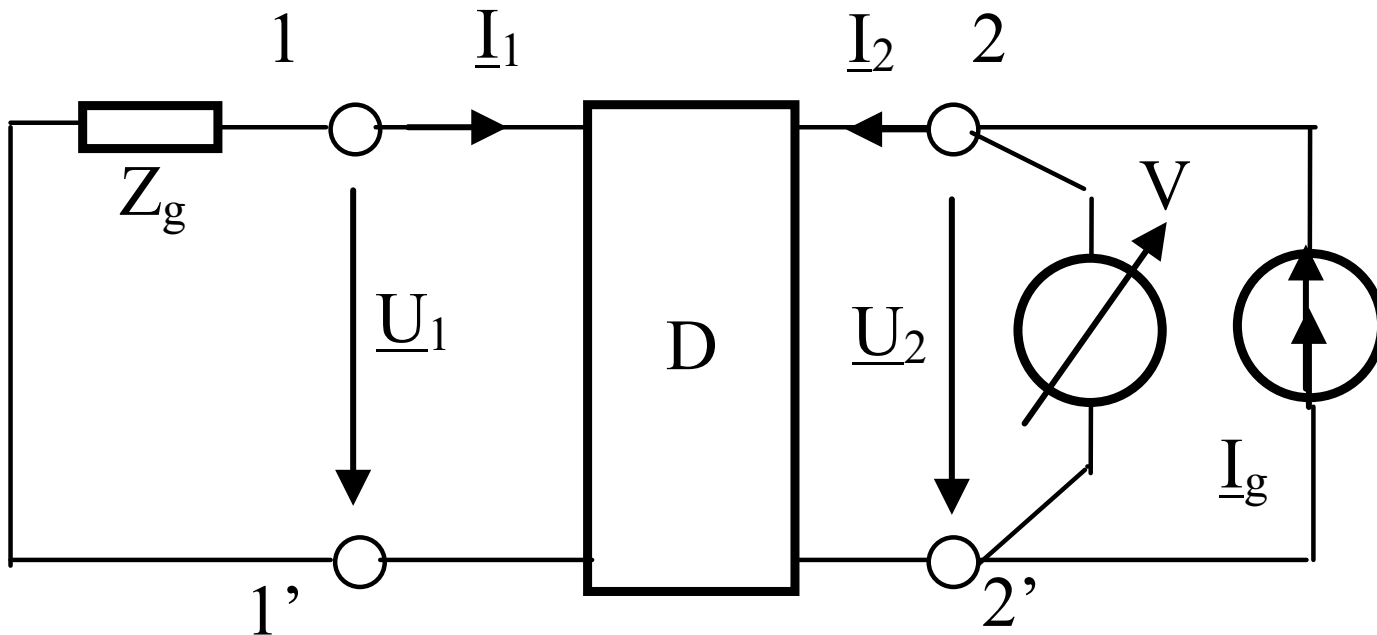
$$Z_{in} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$





Diporți

$$Z_o = \frac{U_2}{I_2}$$





Diporți

- raportul de transfer în tensiune

$$T_U = \frac{U_2}{U_1}$$

- raportul de transfer în curent

$$T_I = \frac{I_2}{I_1}$$

- raportul de transfer în putere

$$T_P = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} = T_U \cdot T_I$$



Diporți

- Rapoartele de transfer - mărimi complexe de forma:

$$T = |T| e^{j \arg(T)}$$

- Dacă $|T| > 1$
 - diportul **amplifică**
 - $|T| =$ *raportul de amplificare* în U, I sau P
- Dacă $|T| < 1$
 - $1/|T| =$ *raportul de atenuare* în U, I sau P
- $\arg(T) =$ *defazajul* pe care diportul îl introduce în U, I, P transferată



Diporți

- raportului de transfer în putere în dB,

$$g_p = 10 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2}{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1} \right| = 10 \log_{10} \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} \quad [dB]$$

- mărimi nesubliniate - modulul fazorilor



Diporți

- Dacă $g_p > 0 \rightarrow g_p$ - nivelul amplificării în putere sau *amplificarea*.

$$g_p = 10 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2}{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1} \right| = 10 \log_{10} \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} \quad [dB]$$

- dacă $g_p < 0 \rightarrow$ diportul atenuează, iar nivelul atenuării în putere sau *atenuarea* este

$$a_p = -10 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2}{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1} \right| = -10 \log_{10} \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} [dB], \quad a_p > 0 dB$$



Diporți

$$g_p = 10 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2}{\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1} \right| = 10 \log_{10} \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1} \quad [dB]$$

- legea lui Ohm:

$$\underline{U}_1 = Z_{in} \cdot \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_2 = Z_s \cdot \underline{I}_2$$

- nivelul transferului în putere este

$$g_p = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} + 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} - 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} \quad [dB]$$



Diporți

- Se poate defini *amplificarea în tensiune*

$$g_U = 20 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} \quad [dB]$$

- respectiv *amplificarea în curent*

$$g_I = 20 \log_{10} \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad [dB]$$



Diporți

- precum și *atenuarea în tensiune*

$$a_U = -20 \log_{10} \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = -20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} \quad [dB]$$

- respectiv *atenuarea în curent*

$$a_I = -20 \log_{10} \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = -20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad [dB]$$



Diporți

$$g_p = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} + 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} - 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} [dB]$$

- Amplificări egale în U și I decât dacă $Z_{in} = Z_s$
- În mod similar pentru atenuare



Diporți

- În general, avem relațiile

$$g_p = g_U + 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} = g_I - 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} \quad [dB]$$

- respectiv

$$a_p = a_U - 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} = a_I + 10 \log_{10} \frac{Z_{in}}{Z_s} \quad [dB]$$



Diporți

- Cunoscând atenuarea în tensiune și cea în curent

$$g_p = \frac{1}{2}(g_U + g_I) \quad [dB]$$

- respectiv

$$a_p = \frac{1}{2}(a_U + a_I) \quad [dB]$$

- valabile pentru orice Z_i sau Z_s



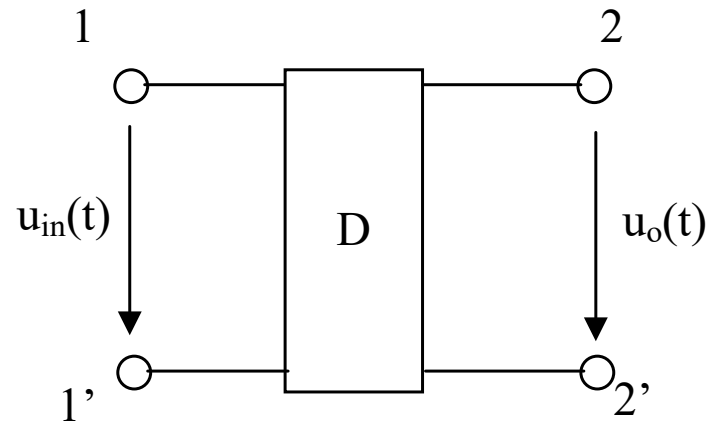
Caracteristica de frecvență

- Z_C și Z_L variază cu f
- vom considera un diport pasiv
- la intrare se aplică:

$$u_{in}(t) = U_{in} \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = 2\pi f$$

- în formă complexă:

$$\underline{U}_{in} = U_{in} \cdot e^{j\varphi}$$

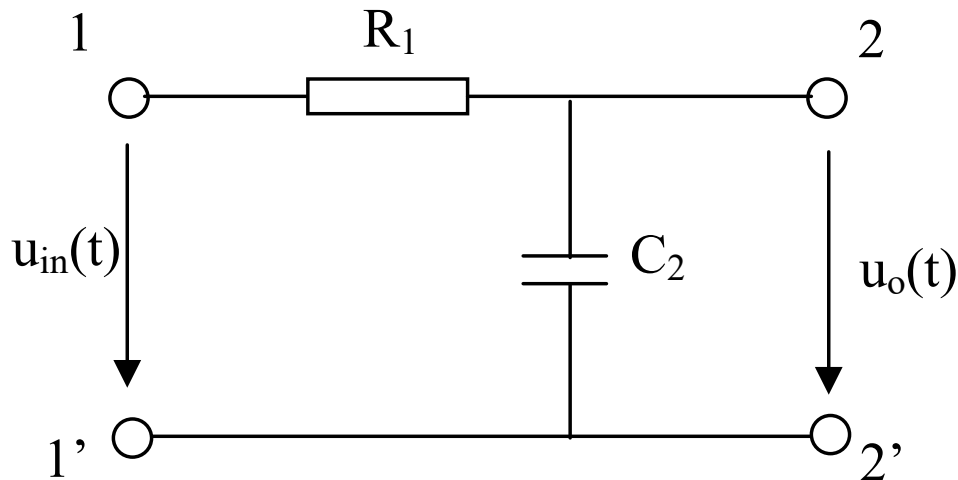




Caracteristica de frecvență

■ **EXEMPLU:** *Circuitul RC de integrare*

- divizor de impedanțe complexe



$$\begin{aligned}\underline{U}_o &= \underline{U}_{in} \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \\ &= U_{in} \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \\ &= U_{in} \cdot e^{j\varphi} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_1}\end{aligned}$$



Caracteristica de frecvență

$$\underline{U_o} = U_{in} e^{j\varphi} \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_1} = U_{in} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_1)^2}} \cdot e^{j(\varphi - \arctg(\omega C_2 R_1))}$$

- U_o și φ_o variază cu ω

$$U_o = U_{in} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \varphi_o = \varphi - \arctg(\omega\tau)$$

- $\tau = C_2 R_1$ *constanta de timp* a circuitului



Caracteristica de frecvență

- Raportul de transfer în tensiune

$$H(\omega) = T_U = \frac{U_o}{U_{in}} = \frac{U_o}{U_{in}} \cdot e^{j(\varphi_o - \varphi)}$$

$$\underline{U_o} = U_o \cdot e^{j\varphi_o}$$

$$\underline{U_{in}} = U_{in} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\underline{U_o} = U_{in} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_1)^2}} \cdot e^{j(\varphi - \arctg(\omega C_2 R_1))}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_1)^2}} \cdot e^{-j \cdot \arctg(\omega C_2 R_1)}$$



Caracteristica de frecvență

- $H(\omega)$ - *funcție de transfer în tensiune*

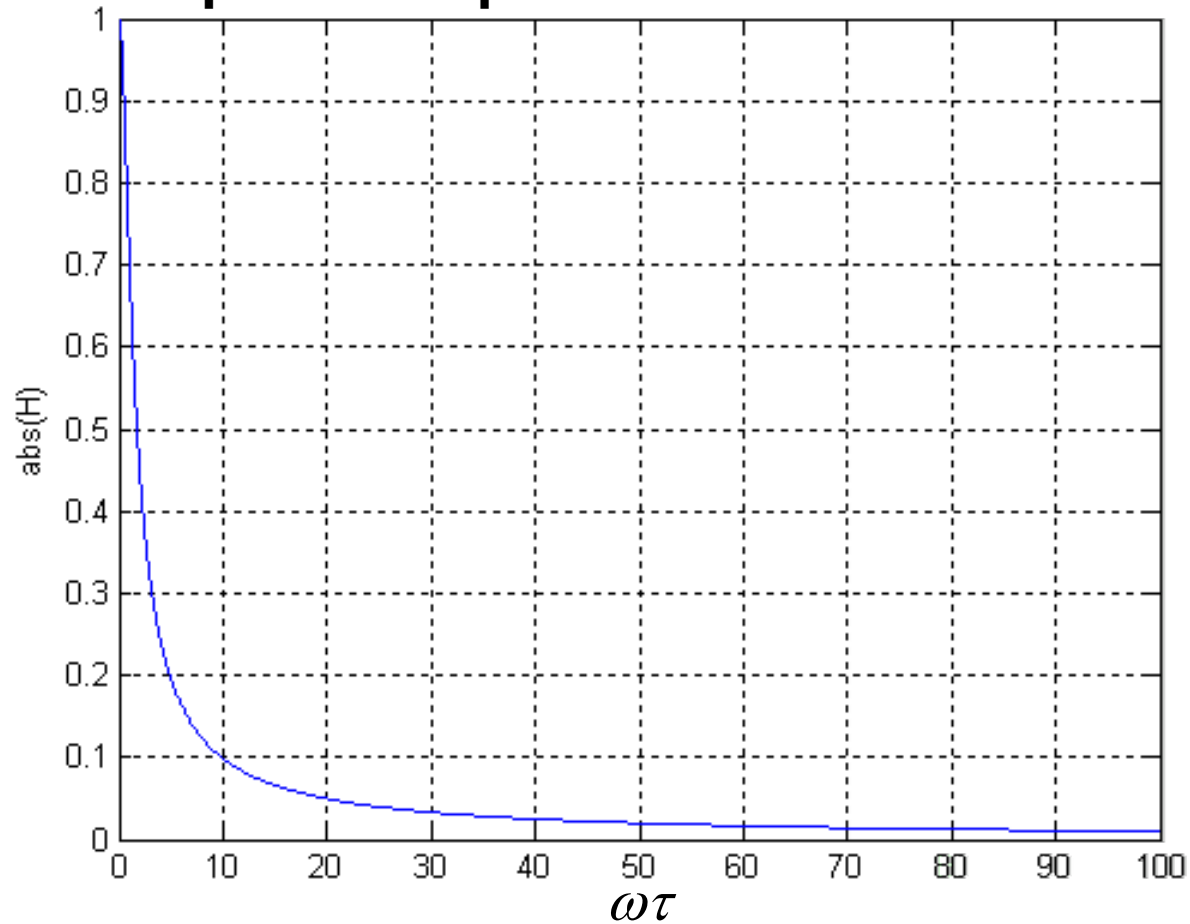
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \arg\{H(\omega)\} = -\arctg(\omega\tau)$$

- *caracteristicile de frecvență* ale circuitului
 - *caracteristica de amplitudine* $|H(\omega)|$
 - *caracteristica de fază* $\arg\{H(\omega)\}$
 - se pot reprezenta grafic caracteristicile de frecvență în funcție de $\omega\tau$



Caracteristica de frecvență

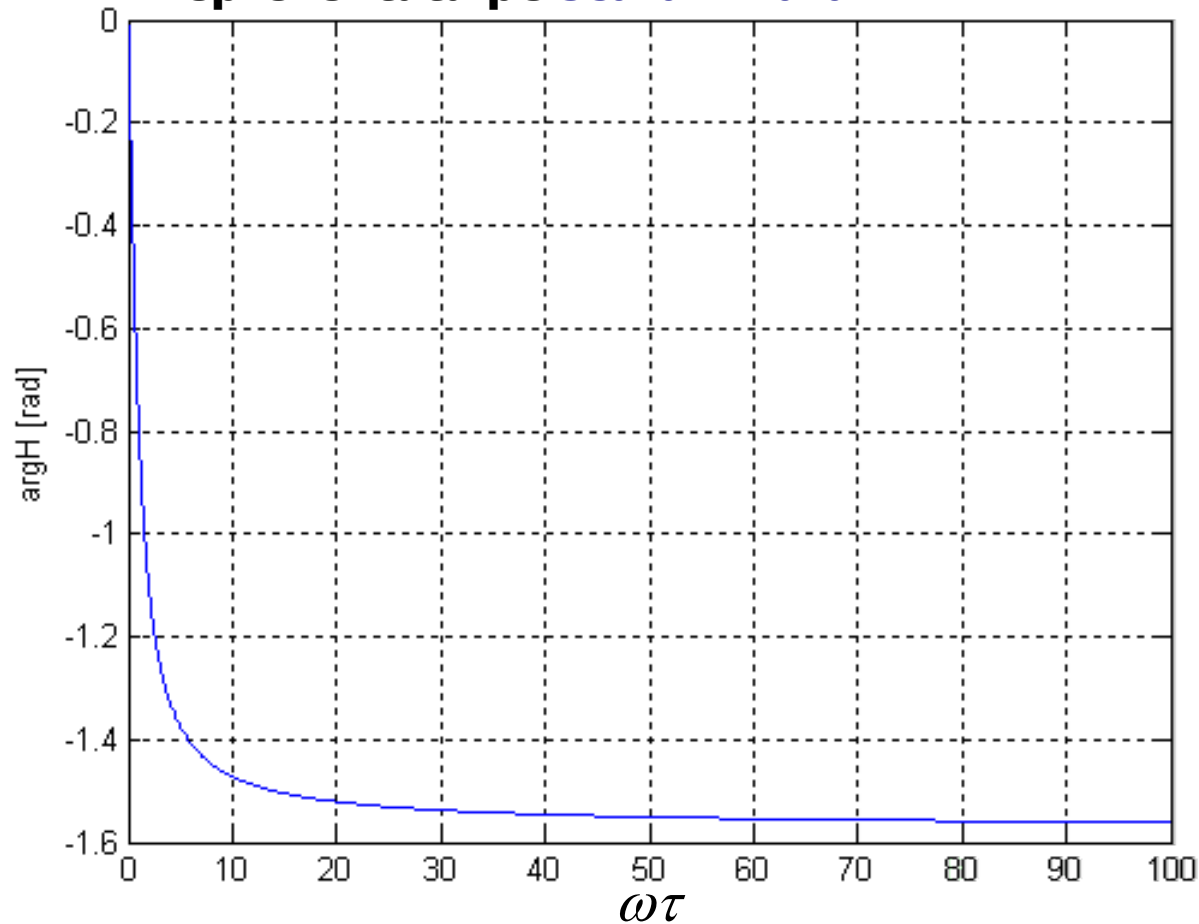
Caracteristica de amplitudine $|H(\omega)|$
reprezentată pe scară liniară





Caracteristica de frecvență

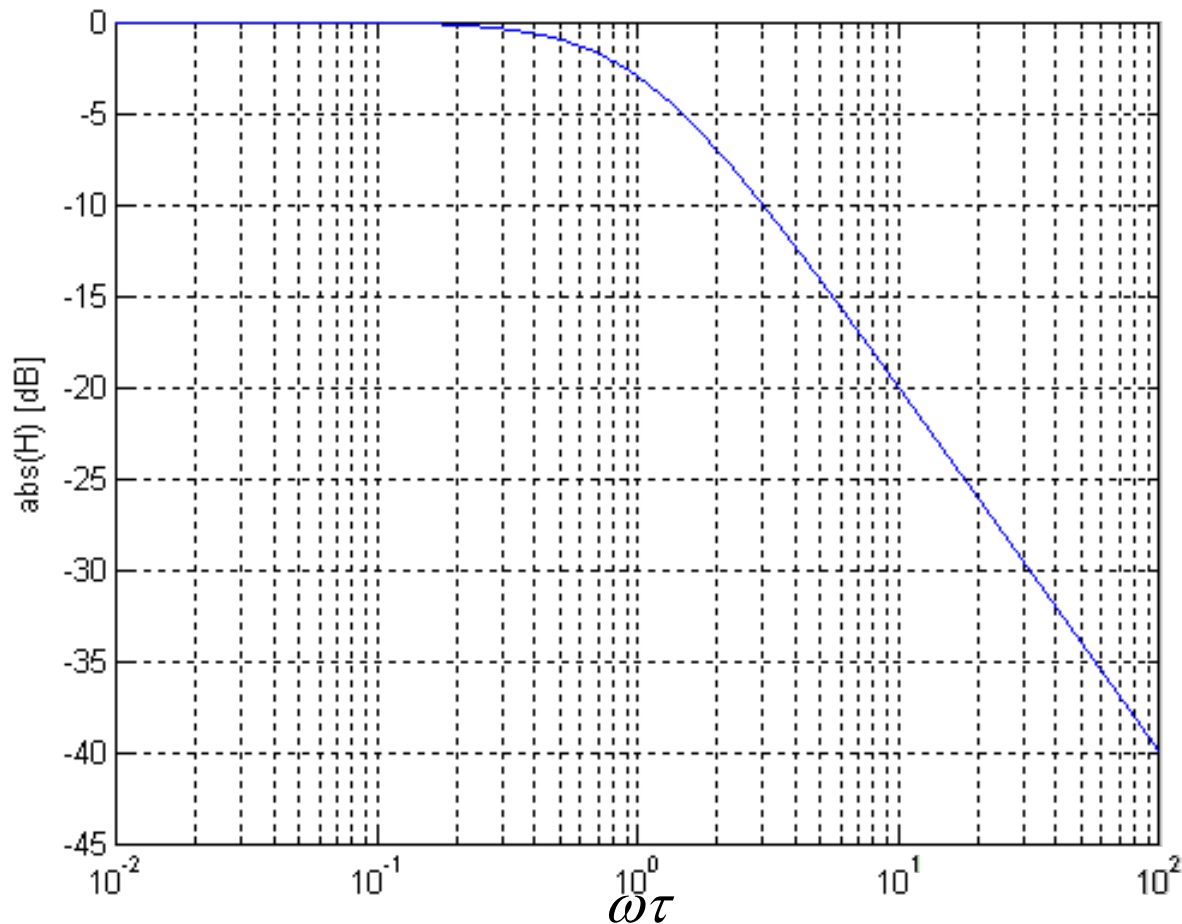
Caracteristica de fază $\arg(H(\omega))$ [rad]
reprezentată pe scară liniară





Caracteristica de frecvență

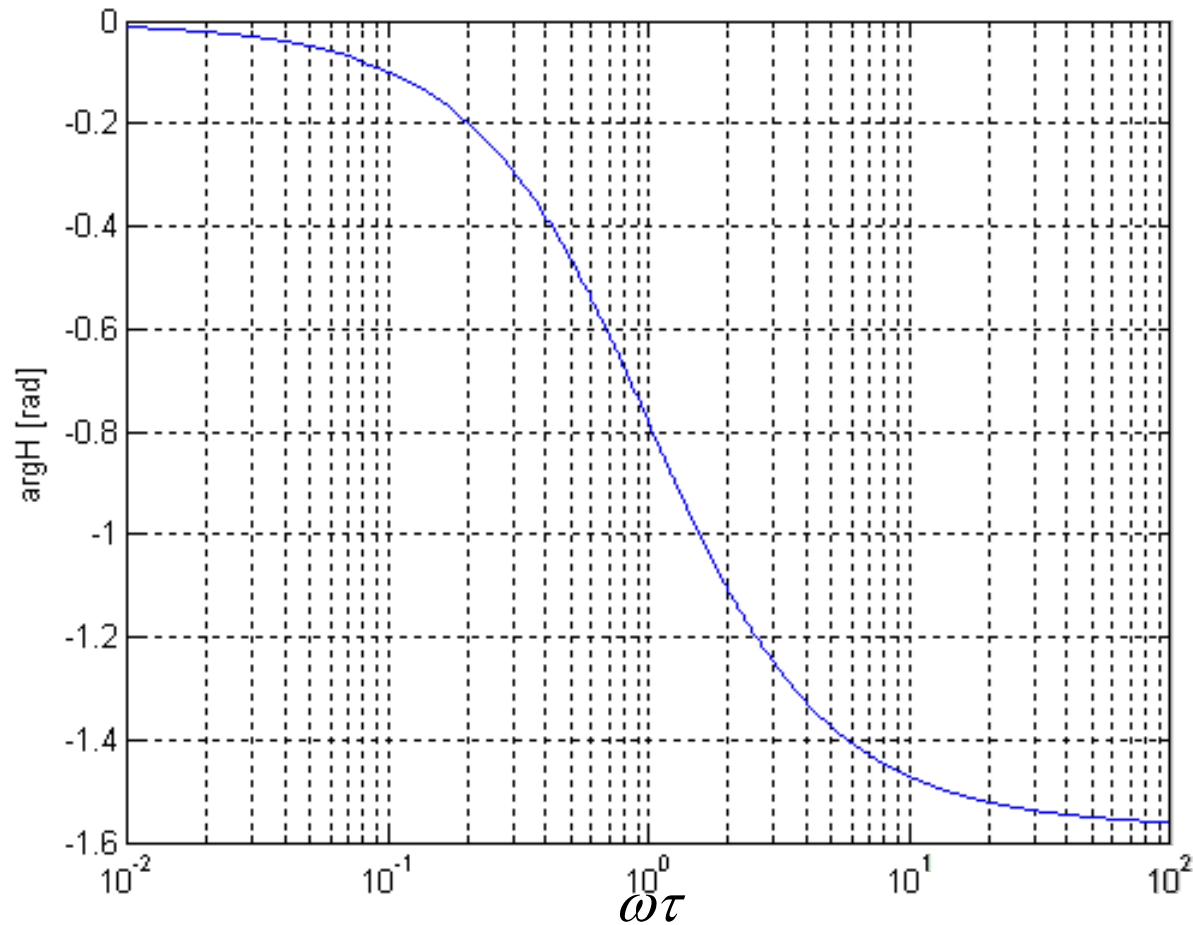
Caracteristica de amplitudine (în dB) în funcție de $\omega\tau$ pe scară logaritmică





Caracteristica de frecvență

Caracteristica de fază în funcție de $\omega\tau$ pe scară logaritmică

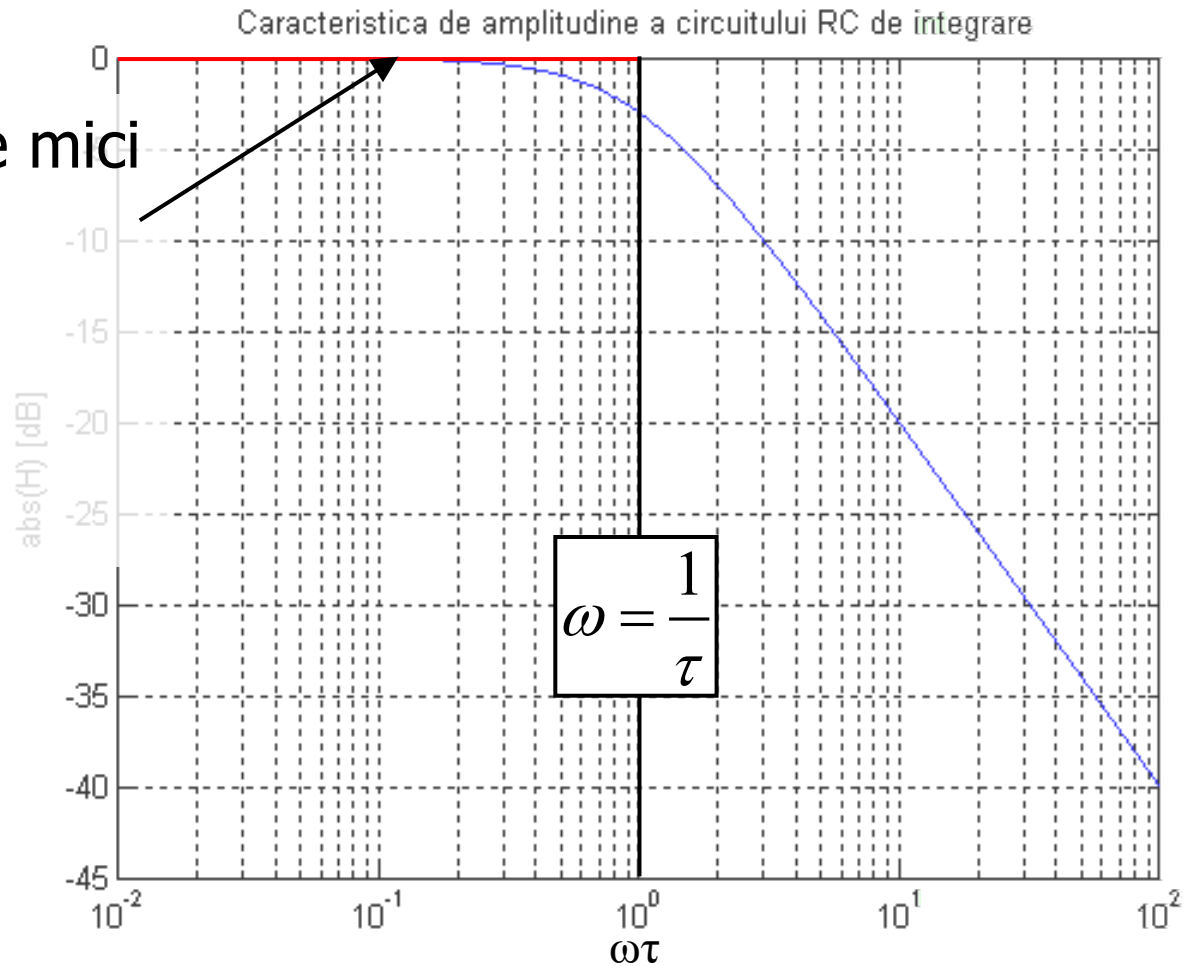




Caracteristica de frecvență

- const. la frecvențe mici

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$





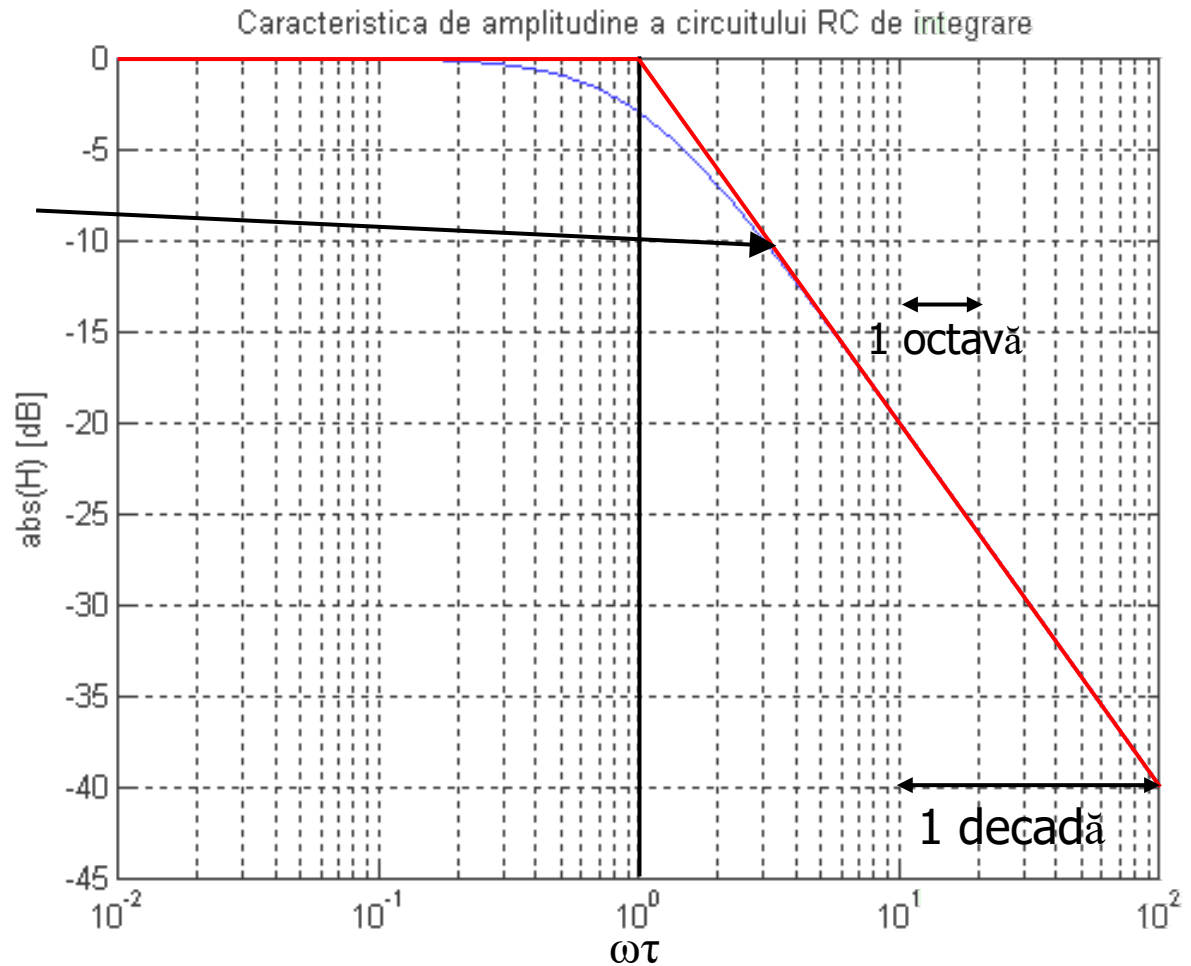
Caracteristica de frecvență

- la frecvențe mari

$$\omega \gg \frac{1}{\tau}$$

-20 dB/decadă

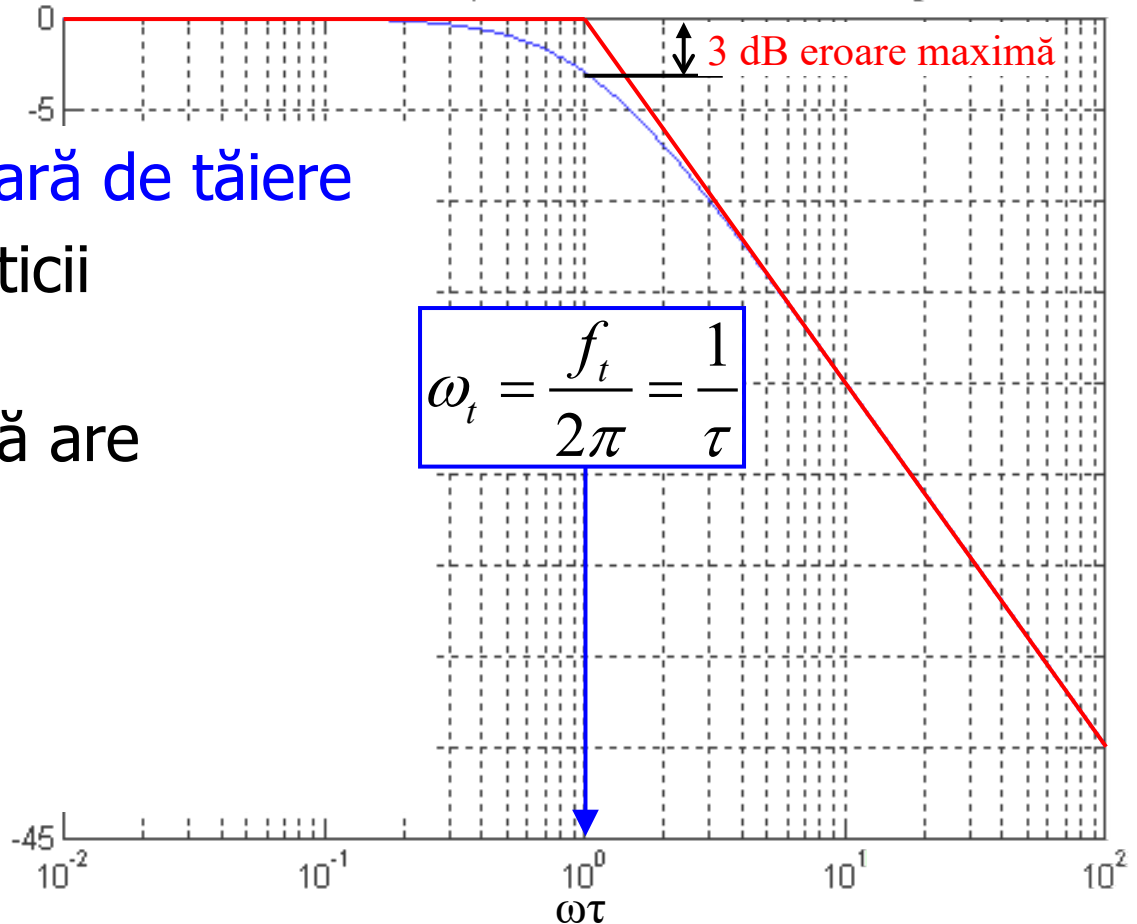
sau -6 dB/octavă





Caracteristica de frecvență

Caracteristica de amplitudine a circuitului RC de integrare



- la **frecvență unghiulară de tăiere**
- scădere a caracteristicii cu aproximativ **3dB**
- caracteristica de fază are valoarea $\pi/4$.



Caracteristica de frecvență

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$|H(\omega_t)| = \left| H\left(\frac{1}{\tau}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \log_{10}(|H(\omega_t)|) = -3 \text{ dB}$$

$$\arg\{H(\omega)\} = -\arctg(\omega\tau)$$

$$\arg\{H(\omega_t)\} = \arg\left\{ H\left(\frac{1}{\tau}\right) \right\} = -\frac{\pi}{4}$$



Caracteristica de frecvență

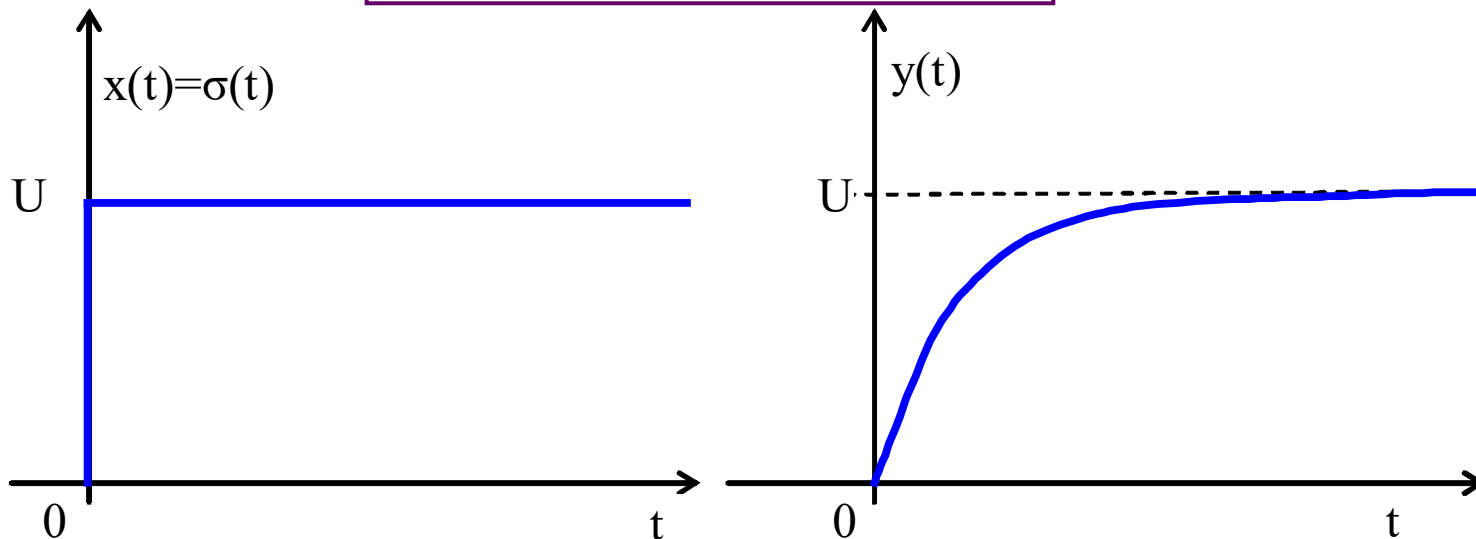
- reprezentarea aproximativă (**linie roșie**) - diagrama Bode a circuitului
- $\omega < \omega_t$, $|H(\omega)| = const.$
- $\omega > \omega_t$, $|H(\omega)|$ dreaptă cu panta de -20 dB/dec.
- eroare maximă de 3 dB la frecvența de tăiere.



Caracteristica de frecvență

- răspunsul la semnalul treaptă al circuitului de integrare:

$$y(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \sigma(t)$$



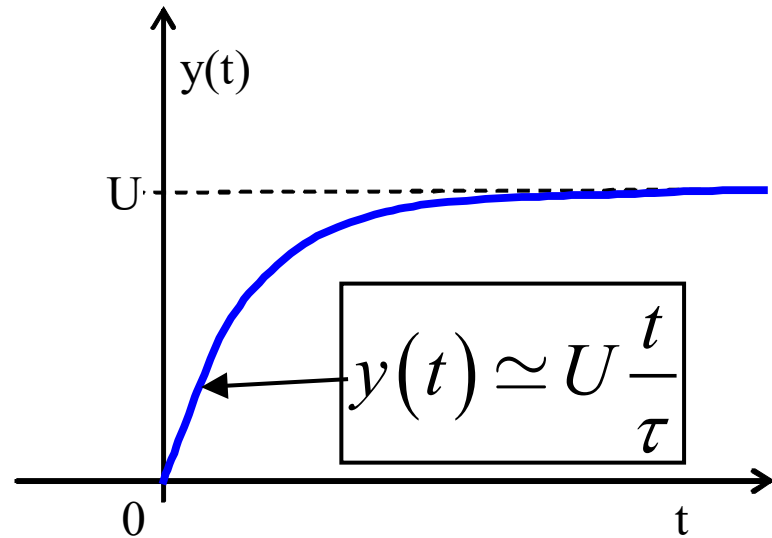
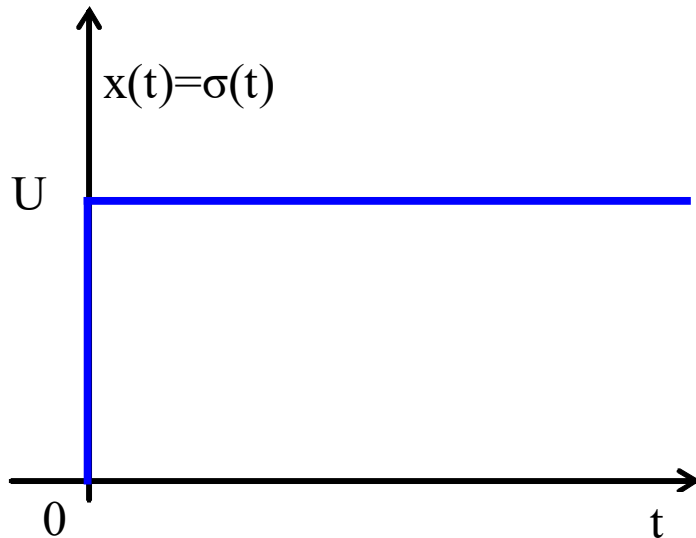


Caracteristica de frecvență

$$y(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \sigma(t)$$

$$e^{-x} \simeq 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

- t/τ – mic $\rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$

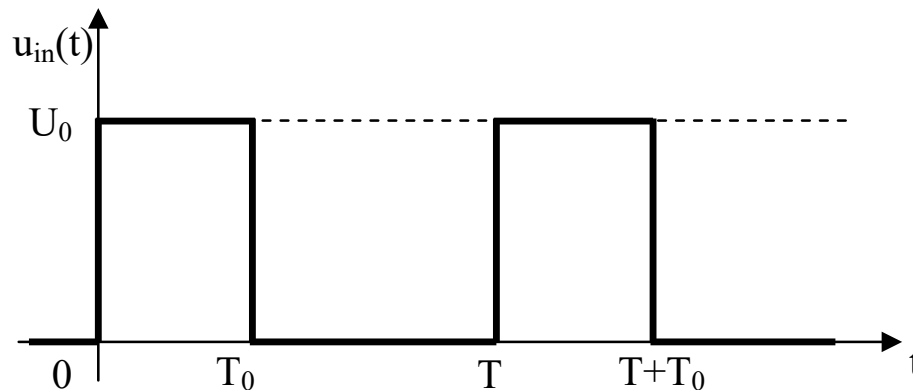




Caracteristica de frecvență

- tren de impulsuri dreptunghilare de durată T_0 , cu perioada T :

$$u_{in}(t) = \begin{cases} U_0 & ; \quad kT \leq t < kT + T_0 \\ 0 & ; \quad kT + T_0 \leq t < (k+1)T \end{cases} \quad ; \quad k \in \mathbf{Z}$$





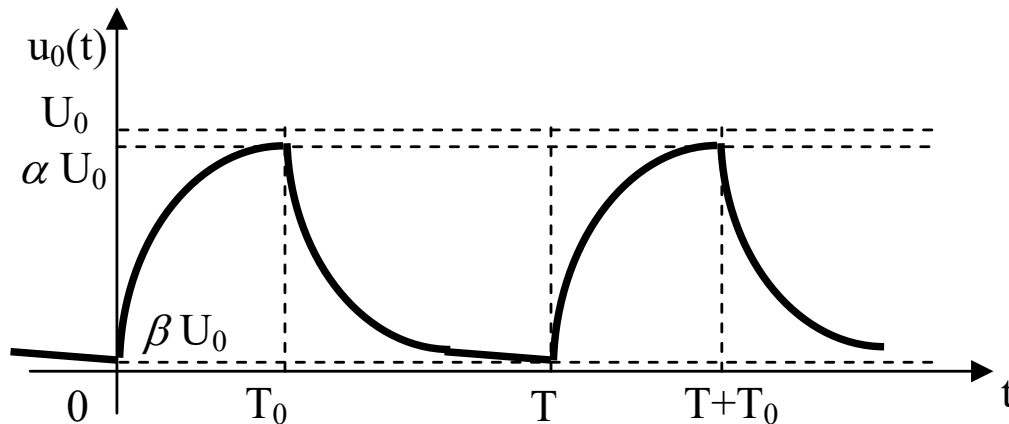
Caracteristica de frecvență

- la ieșire se obține semnalul:

$$u_0(t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t-kT}{\tau}} \right) & ; \quad kT \leq t < kT + T_0 \\ U_0 \frac{e^{\frac{T_0}{\tau}} - 1 - e^{-\frac{T-T_0}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t-kT}{\tau}} & ; \quad kT + T_0 \leq t < (k+1)T \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}$$



Caracteristica de frecvență



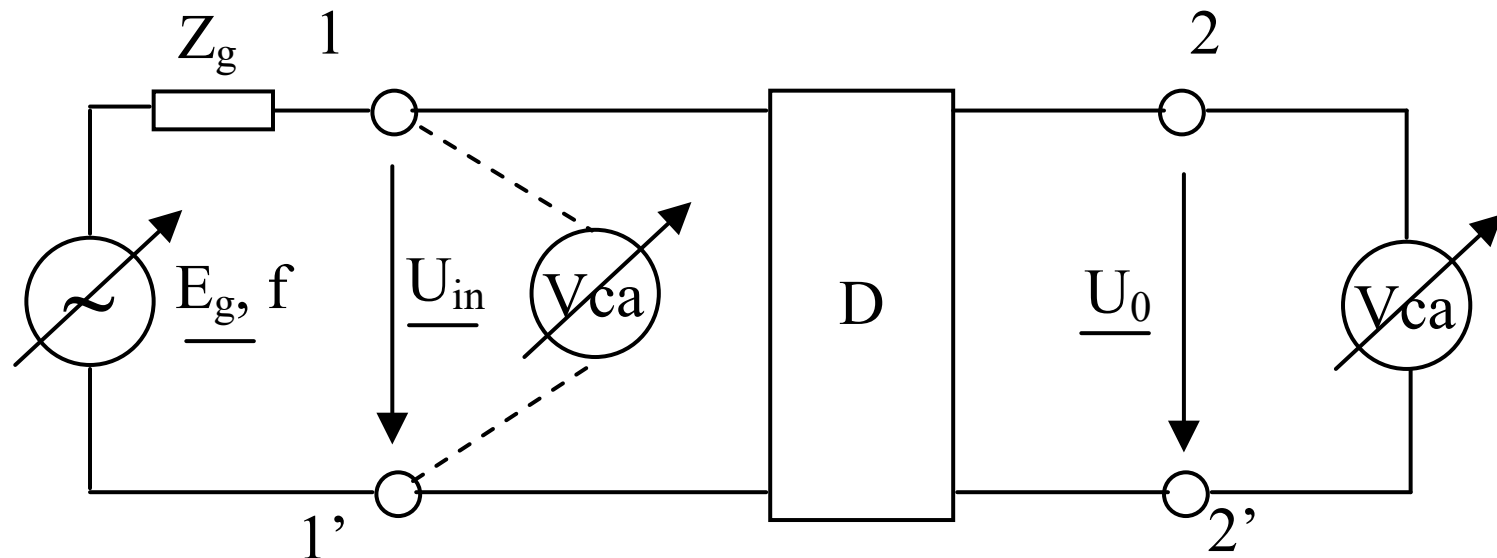
$$\alpha = \frac{1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$
$$\beta = \frac{e^{-\frac{T_0}{\tau}} - 1 - e^{-\frac{T-T_0}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

- pentru $\tau \cong T_0$ → semnal triunghiular
→ circuit de integrare



Caracteristica de frecvență

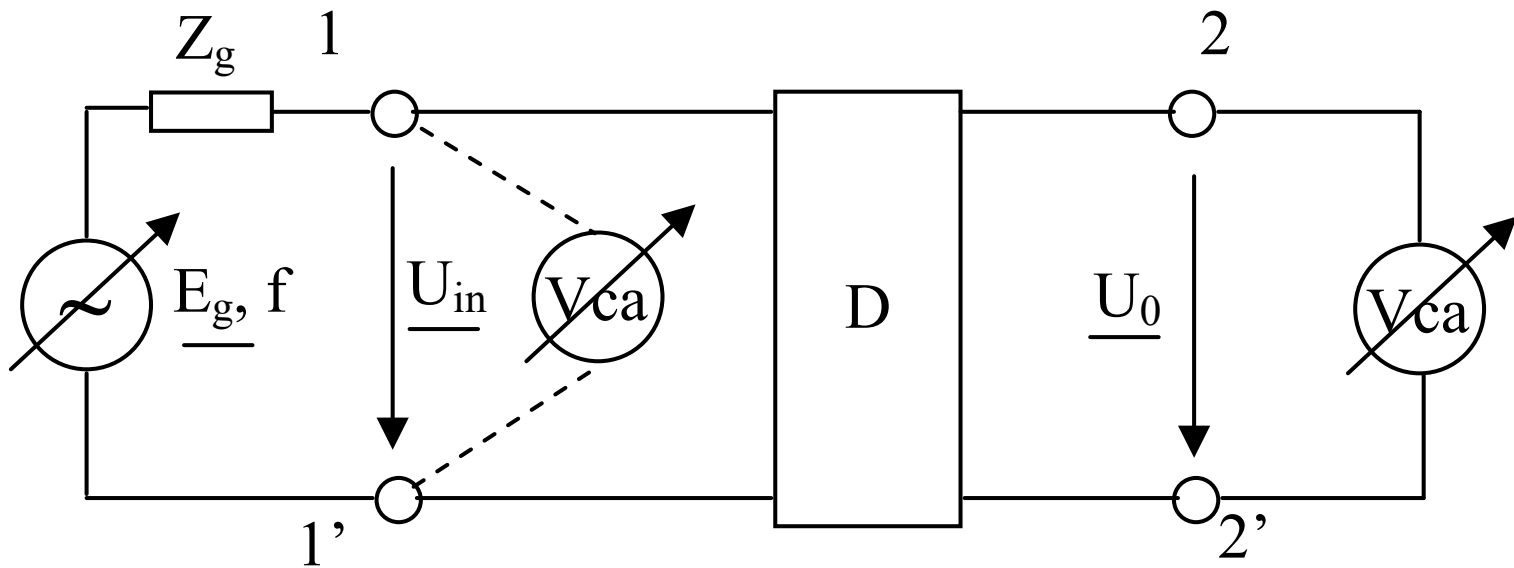
- *Determinarea experimentală și trasarea caracteristicilor de amplitudine și de fază ale unui diport*





Caracteristica de frecvență

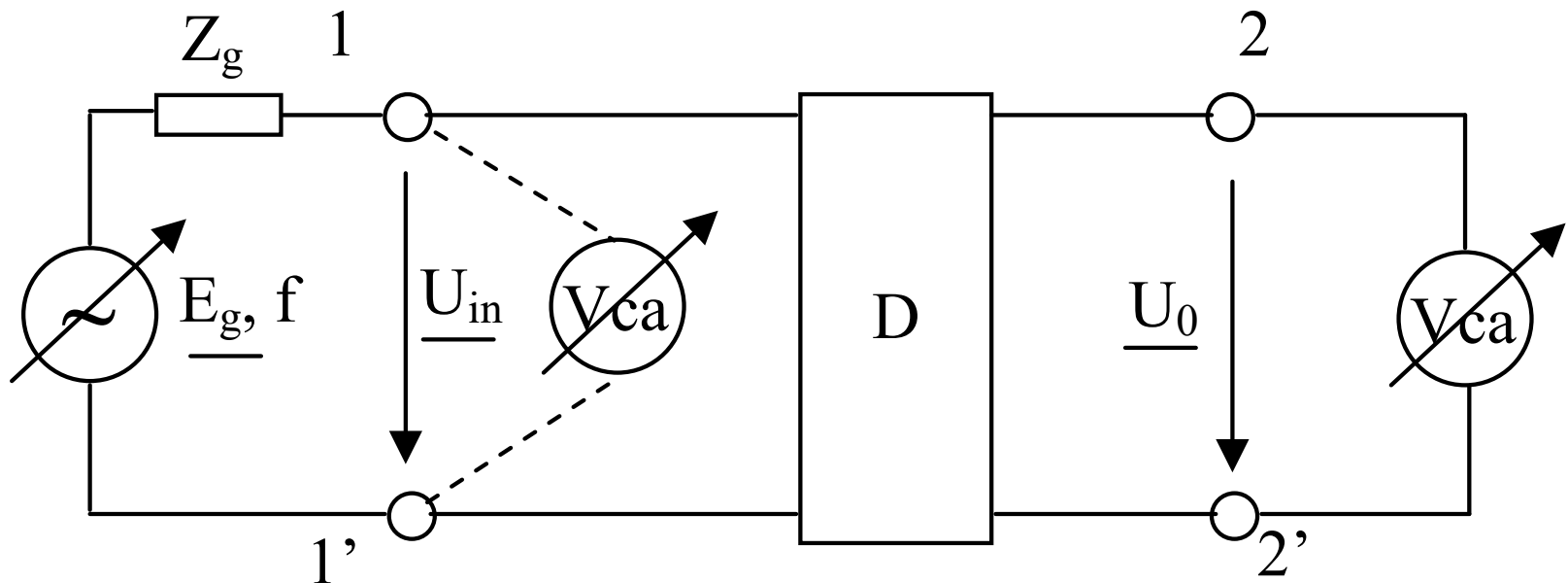
- *Determinarea caracteristicii de amplitudine*
 - semnal sinusoidal, frecvență reglabilă f
 - amplitudine dată U_{in} la generator





Caracteristica de frecvență

- la ieșire V_{ca}
- U_0 pentru diferite f
- se calculează $|H(\omega)|$ *la aceeași frecvență.*





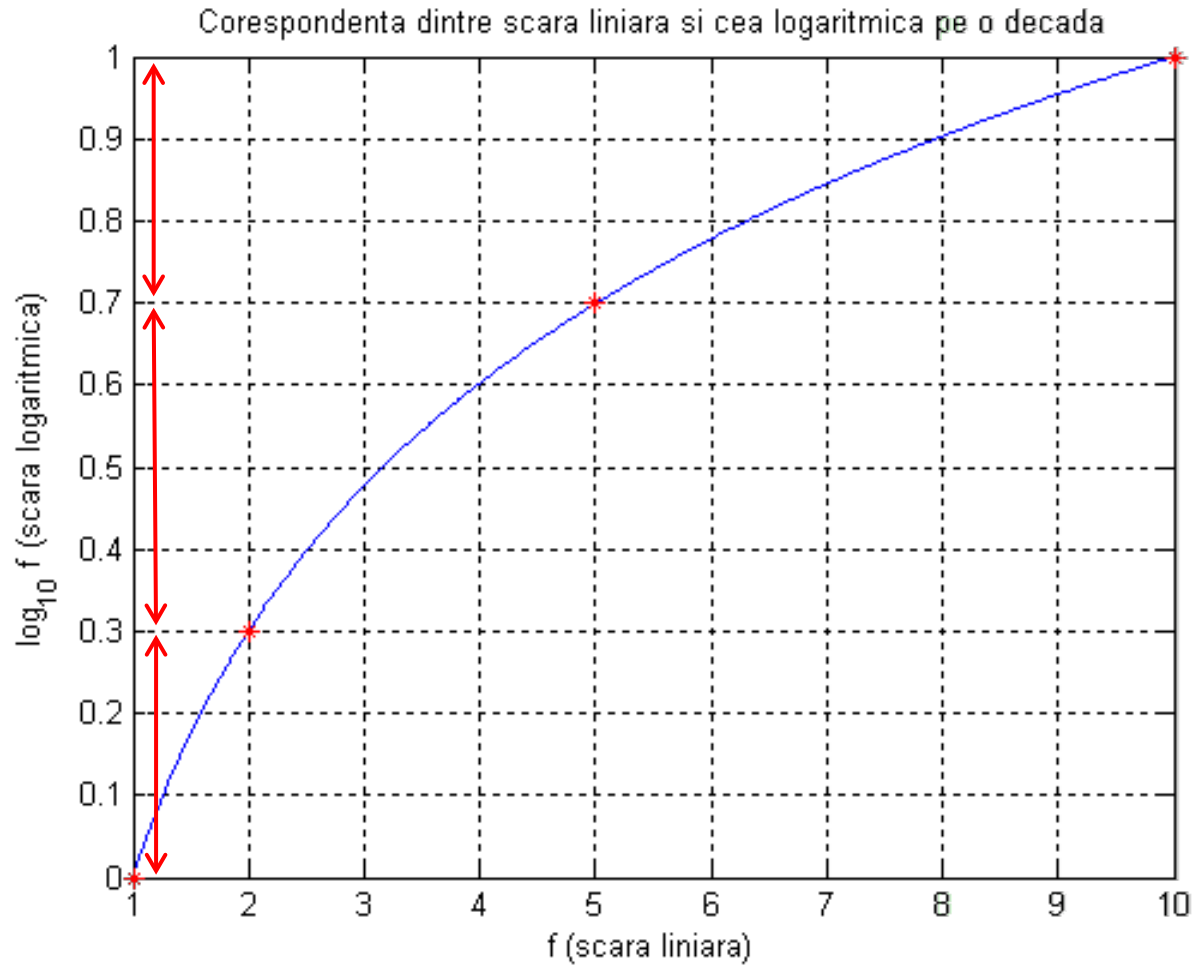
Caracteristica de frecvență

Practic:

- determinare f_t
- frecvențele se aleg în rapoarte de 1; 2; 5; 10 în interiorul fiecărei decade.
- număr suficient de decade



Caracteristica de frecvență





Caracteristica de frecvență

- o alegere optimă a f pentru circuitul de integrare:

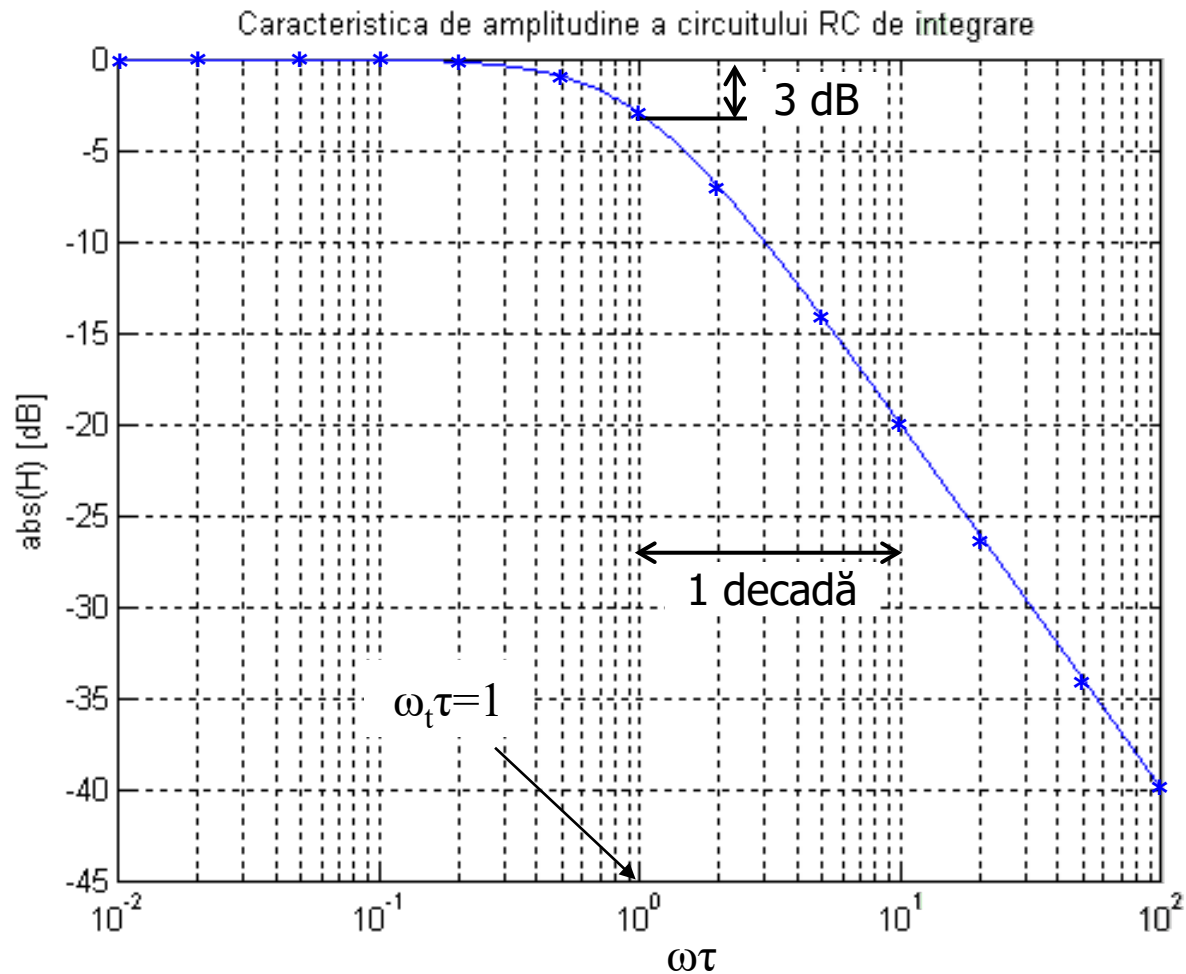
$$f \in \left\{ \frac{0,01}{2\pi\tau}; \frac{0,02}{2\pi\tau}; \frac{0,05}{2\pi\tau}; \frac{0,1}{2\pi\tau}; \frac{0,2}{2\pi\tau}; \frac{0,5}{2\pi\tau}; \frac{1}{2\pi\tau}; \frac{2}{2\pi\tau}; \frac{5}{2\pi\tau}; \frac{10}{2\pi\tau}; \frac{20}{2\pi\tau}; \frac{50}{2\pi\tau}; \frac{100}{2\pi\tau} \right\}$$

- valori „rotunde”
- **Exemplu:** pentru $\tau=0,1$ ms:

$$f \in \{0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200\} \quad [kHz]$$



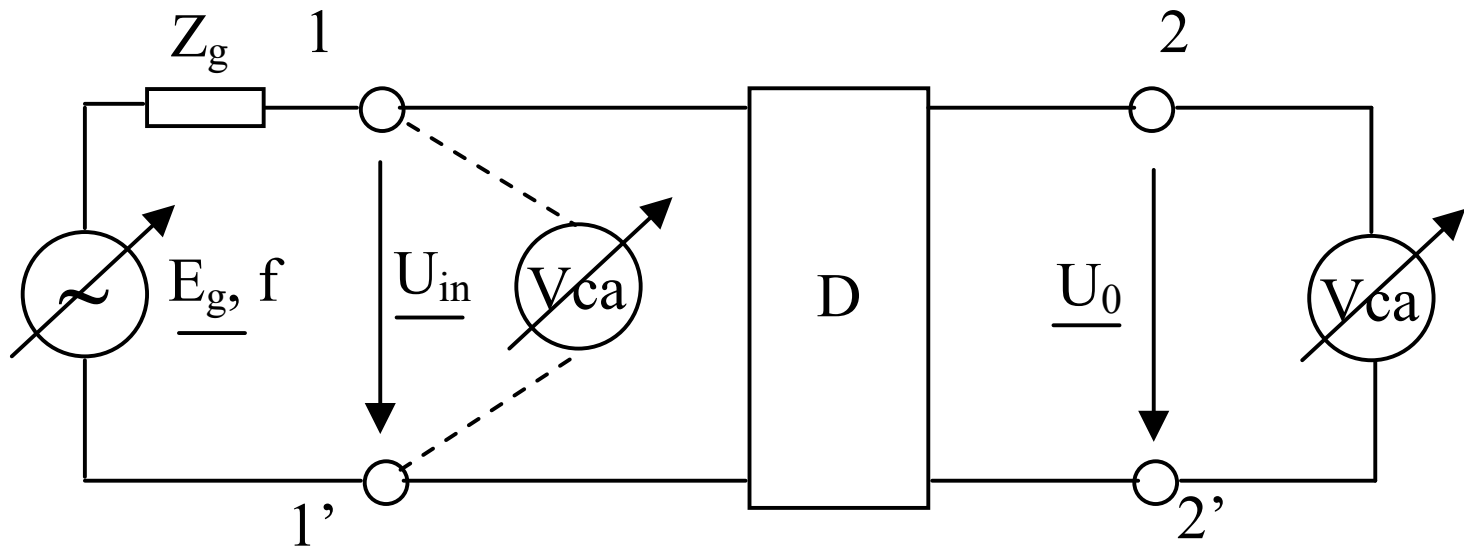
Caracteristica de frecvență





Caracteristica de frecvență

- voltmetrul are o impedanță internă $R_V = R_S$
 - Z_{in} variabilă cu frecvența
- corecție a amplitudinii generatorului de la o frecvență la alta.





Caracteristica de frecvență

- *Trasarea caracteristicii de fază*
 - similar, la aceleași frecvențe ca în cazul $|H(\omega)|$
 - figuri Lissajoux

