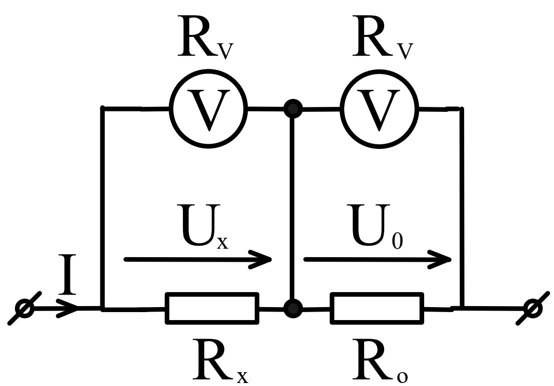
4. Măsurarea impedanţelor

4.2. Măsurarea rezistenţelor în curent continuu

Metoda comparaţiei

- Această metodă:
  - măsurarea rezistenţelor $R_x \sim R_0$
  - montaj *serie* sau *paralel.*
- ***Montajul serie*** *(metoda celor două voltmetre)*
  - două voltmetre identice (aceeaşi R_v)



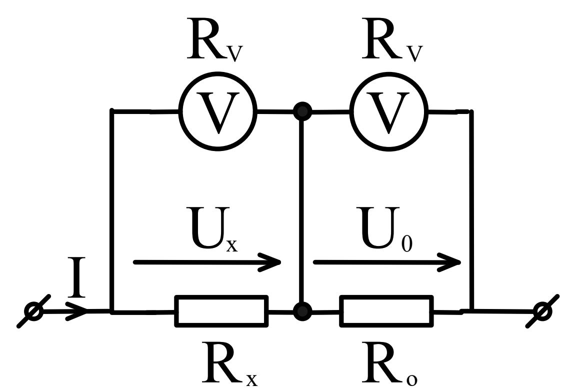
Metoda comparaţiei

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I \cdot \dfrac{R_V}{R_V + R_x}} = \frac{U_x}{\dfrac{U_0}{\dfrac{R_V R_0}{R_V + R_0}} \cdot \dfrac{R_V}{R_V + R_x}}$$

$$= \frac{U_x}{U_0} R_0 \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0}$$

- Dacă $R_m \triangleq \dfrac{U_x}{I} = \dfrac{U_x}{U_0} R_0$

$$\Rightarrow \boxed{R_x = R_m \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0}}$$



Metoda comparaţiei

$$\boxed{R_x = R_{\mathrm{m}} \frac{R_{\mathrm{V}} + R_x}{R_{\mathrm{V}} + R_0}}$$

- Pentru $R_{\mathrm{V}} >> R_x,\ \ R_0$ sau dacă $R_x \cong R_0$, se obţine

$$R_x \cong R_{\mathrm{m}}$$

- Altfel → o eroare sistematică

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_{\mathrm{m}} - R_x}{R_x} = \frac{R_{\mathrm{m}} - R_{\mathrm{m}} \frac{R_{\mathrm{V}} + R_x}{R_{\mathrm{V}} + R_0}}{R_{\mathrm{m}} \frac{R_{\mathrm{V}} + R_x}{R_{\mathrm{V}} + R_0}} = \frac{R_0 - R_x}{R_{\mathrm{V}} + R_x}$$

- măsurarea *rezistenţelor mici*

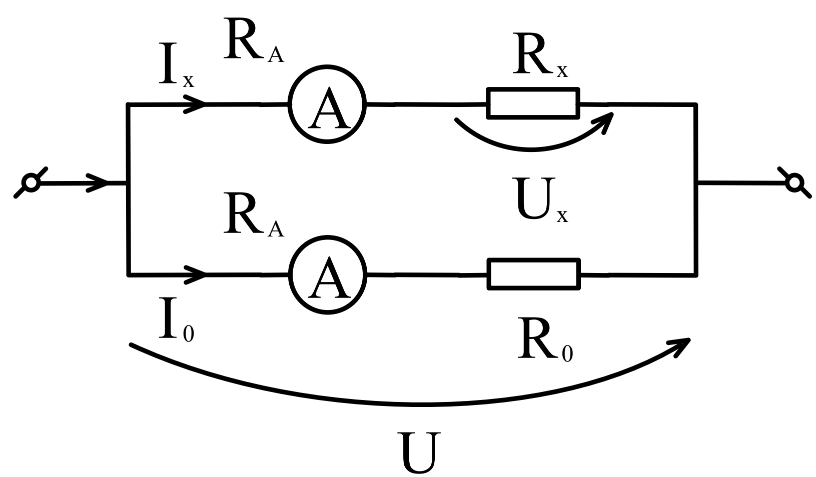
$$R_x,\ \ R_0 << R_{\mathrm{V}}$$

Metoda comparaţiei

- ***Montajul paralel*** *(metoda celor două ampermetre)*
  - două ampermetre identice (aceeaşi R_A).

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - I_x R_A}{I_x} = \frac{I_0 R_A + I_0 R_0 - I_x R_A}{I_x} = \frac{I_0}{I_x}(R_A + R_0) - R_A =$$

$$= \frac{I_0}{I_x} R_0 \left(1 + \frac{R_A}{R_0}\right) - R_A$$



  - Dacă $R_m \triangleq \frac{U}{I_x} = \frac{I_0}{I_x} R_0$

$$\Rightarrow \boxed{R_x = R_m \left(1 + \frac{R_A}{R_0}\right) - R_A}$$

Metoda comparaţiei

$$R_x = R_\mathrm{m}\left(1 + \frac{R_\mathrm{A}}{R_0}\right) - R_\mathrm{A}$$

- Pentru $R_\mathrm{A} << R_x, R_0$ sau dacă $R_x \cong R_0$, se obţine

$$R_x \cong R_\mathrm{m}$$

- altfel → o eroare sistematică,

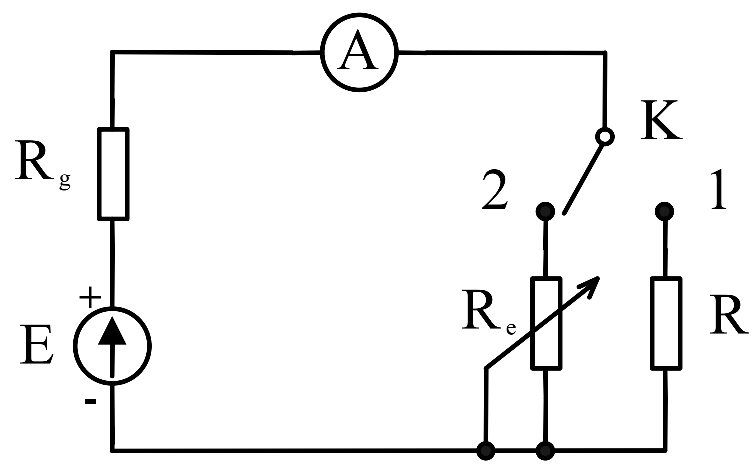
$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_\mathrm{m} - R_x}{R_x} = \frac{R_\mathrm{m} - R_\mathrm{m} + R_\mathrm{A}\left(1 - \frac{R_\mathrm{m}}{R_0}\right)}{R_x} = \frac{R_\mathrm{A}}{R_x}\left(1 - \frac{R_\mathrm{m}}{R_0}\right)$$

- măsurarea *rezistenţelor mari*

$$R_x, R_0 >> R_\mathrm{A}$$

Metoda substituţiei

- rezistenţă etalon R_e variabilă, de acelaşi ordin de mărime cu R_x
- două etape:
  - Etapa I: K→ poziţia 1
    - se notează indicaţia aparatului de măsură;
  - Etapa a II-a: K→ poziţia 2
    - se reglează R_e pentru a obţine aceeaşi indicaţie.



Metoda substituţiei

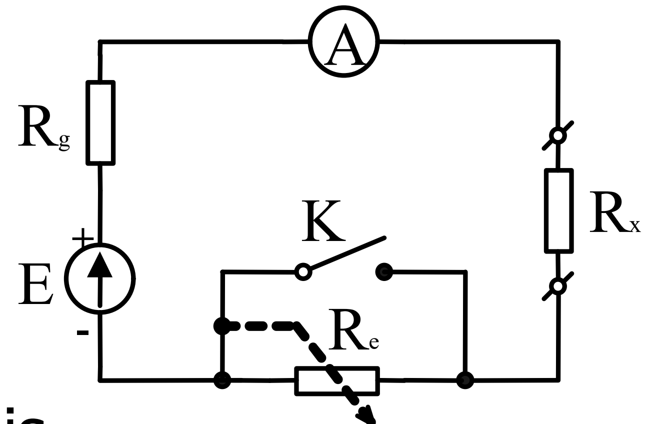
- Rezultă valoarea rezistenţei necunoscute:

$$R_x = R_\mathrm{e}$$

- Precizia măsurării depinde de:
  - eroarea de etalonare a R_e
  - de stabilitatea tensiunii aplicate montajului,
  - de erorile de citire la aparatul indicator,
- dar nu depinde de eroarea de etalonare a aparatului indicator

Metoda rezistenţei adiţionale variabile

- rezistenţă etalon R_e, de preferinţă variabilă.



1. Dacă R_g=0
   - Etapa I: K → poziţia închis
     - se notează I_1
   - Etapa a II-a K → poziţia deschis
     - se notează I_2

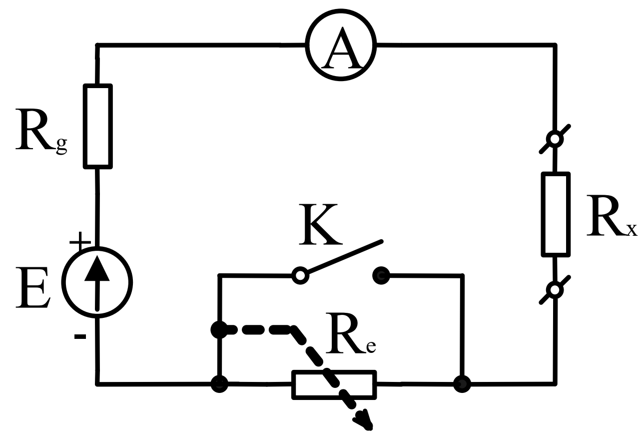
$$R_x I_1 = \left(R_x + R_e\right) I_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_x = \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1}}$$

Metoda rezistenţei adiţionale variabile

$$R_x = \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1}$$

- Aparat real → $R_x \rightarrow R_x + R_A$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_x = \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1} - R_A}$$



- dacă R_e este variabilă,
  se poate regla în etapa a II-a până când $I_2 = I_1/2$

$$\Rightarrow \quad R_x = R_e$$

Metoda rezistenţei adiţionale variabilă

2. Dacă $R_{\mathrm{g}} \neq 0$ operaţiile de la punctul 1. se repetă de două ori:
   - mai întâi fără R_x în circuit → R_g
   - a doua oară cu R_x conectată → $R_g + R_x$

- indicaţiile aparatului ce corespund fiecărei etape:
  - fără R_x fără R_e → I_1
  - fără R_x, cu R_e → I_2
  - cu R_x, fără R_e → I_3
  - cu R_x cu R_e → I_4

$$\Rightarrow \boxed{R_x = \frac{R_{\mathrm{e}}}{\frac{I_3}{I_4} - 1} - \frac{R_{\mathrm{e}}}{\frac{I_1}{I_2} - 1}}$$

Ohmetre cu citire directă

- au următoarele particularităţi:
  - *măsoară direct* R_x;
  - *sursă* + *aparat indicator etalonat* în valori ale rezistenţei.
  - Condiţiile sursă :

$$R_g = \mathrm{ct} \qquad E = \mathrm{ct}$$

  - Pentru a compensa variaţia lui R_g se utilizează o rezistenţă adiţională care se reglează aşa încât

$$R_g + R_a = \mathrm{ct}$$

Ohmetre cu citire directă

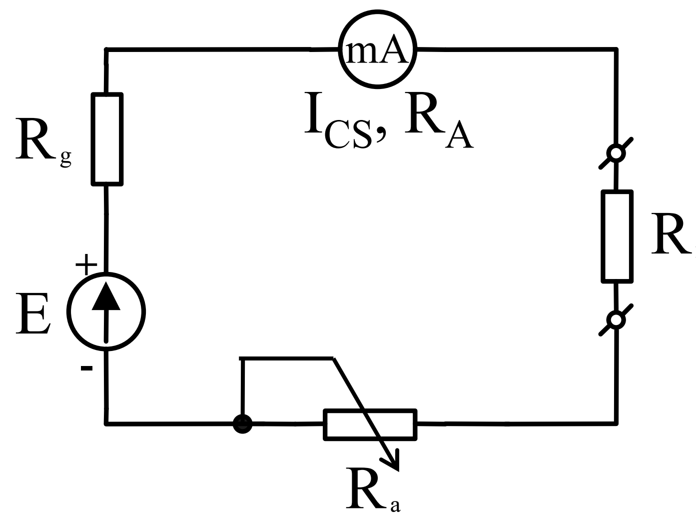
Ohmetre serie

- Verificarea etalonării: *"aducerea la zero"*

$$I_{sc} = I_{CS} = \frac{E}{R_g + R_A + R_a} = \frac{E}{R_s}$$

- unde

$$R_s \triangleq R_g + R_A + R_a$$



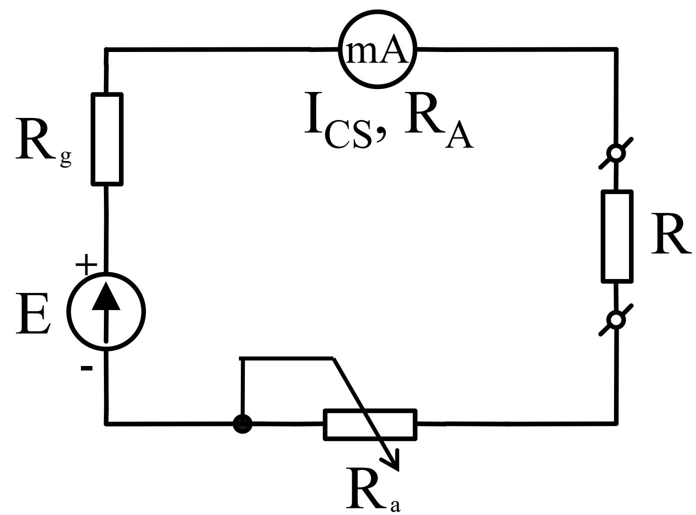
Ohmetre cu citire directă

- Se conectează R_x

$$I = \frac{E}{R_x + \left(R_g + R_A + R_a\right)} = \frac{E}{R_x + R_s} = I_{CS}\frac{R_s}{R_x + R_s}$$

$$\Rightarrow R_x = R_s\left(\frac{I_{CS}}{I} - 1\right)$$

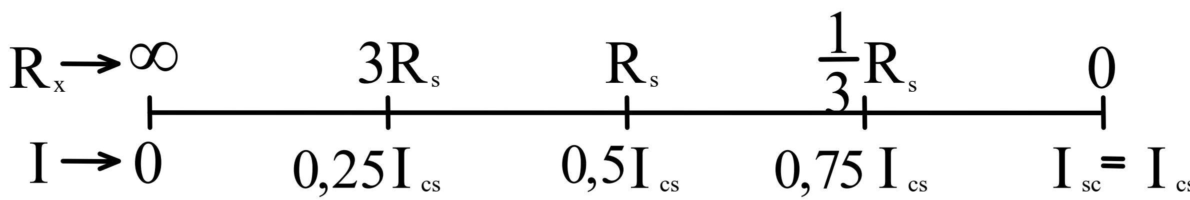
- dependenţă neliniară



Ohmetre cu citire directă

$$R_x = R_s\left(\frac{I_{CS}}{I} - 1\right)$$

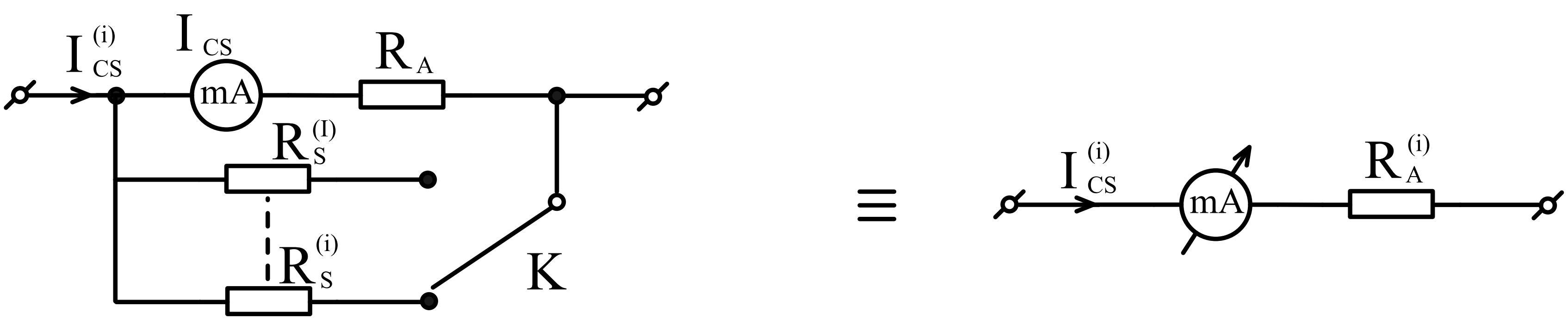
- etalonarea scării:



→ $R_x \ll R_s$ sau $R_x \gg R_s$ nu pot fi citite cu precizie pe o astfel de scară

Ohmetre cu citire directă

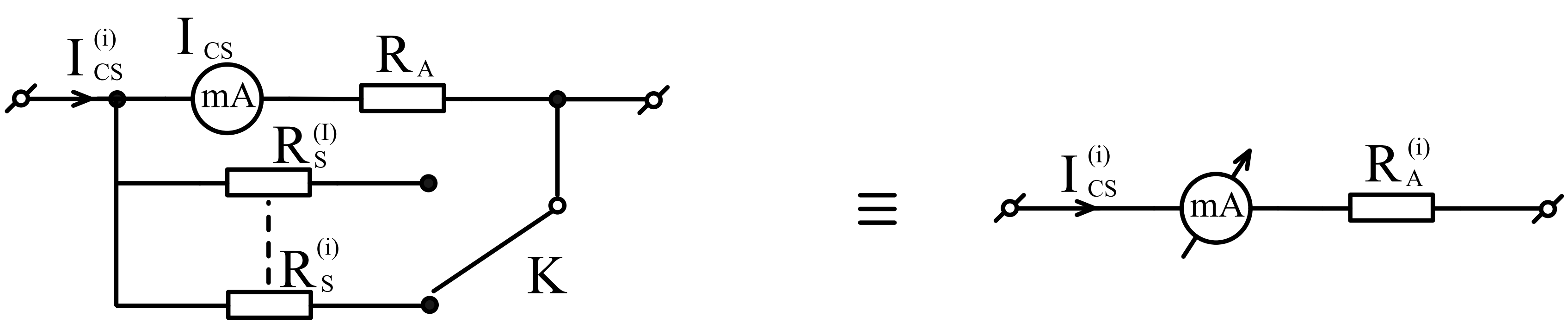
- mai multe scări de valori centrale $R_s = \dfrac{E}{I_{CS}^{(i)}}$ diferite
- modificarea sensibilităţii mA cu ajutorul unor şunturi



Ohmetre cu citire directă

$$I_{\mathrm{CS}}^{(i)} = I_{\mathrm{CS}} \frac{R_{ş}^{(i)} + R_{\mathrm{A}}}{R_{ş}^{(i)}} > I_{\mathrm{CS}} \qquad R_{\mathrm{A}}^{(i)} = \frac{R_{\mathrm{A}} R_{ş}}{R_{\mathrm{A}} + R_{ş}^{(i)}}$$

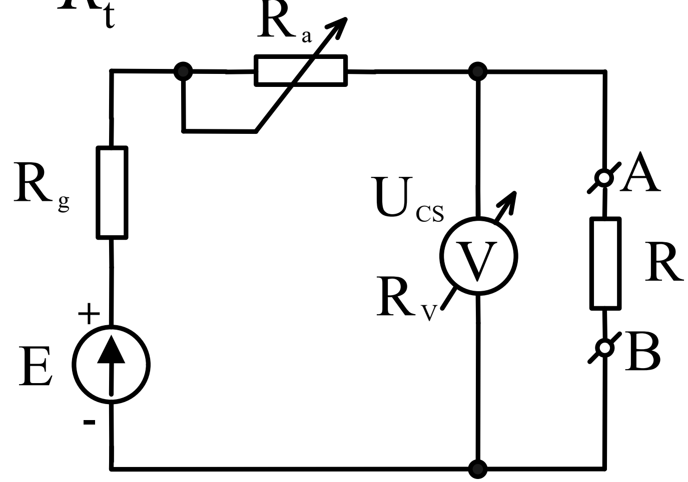
- Deoarece valorile centrale $R_{ş}^{(i)} = E \big/ I_{\mathrm{CS}}^{(i)}$ se modifică doar printr-un coeficient multiplicativ, nu mai este necesară o nouă etalonare la trecerea de pe o scară pe alta.



Ohmetre cu citire directă

- **Ohmetre paralel**
  - verificarea etalonării: *"aducerea la ∞"*
  - Tensiunea la bornele voltmetrului în acest caz va fi

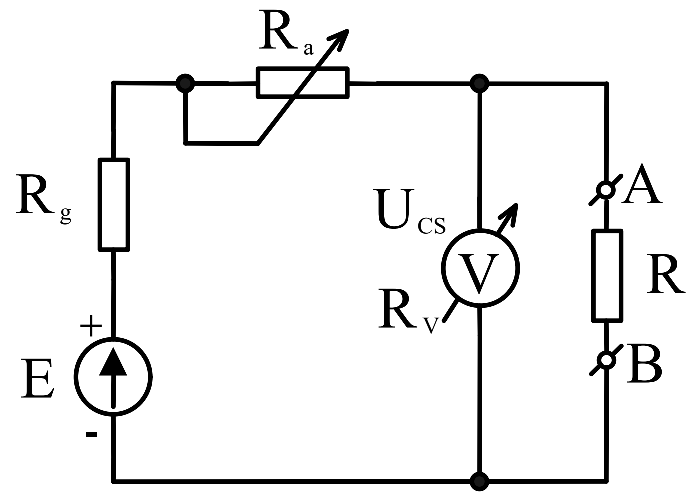
$$U_{gol} = U_{CS} = \frac{R_V E}{R_g + R_a + R_V} = \frac{R_V}{R_t} E$$



  - unde

$$R_t \triangleq R_g + R_a + R_V$$

Ohmetre cu citire directă



- Cu rezistenţa R_x conectată, se obţine

$$U = \frac{R_\mathrm{V} \| R_x}{R_\mathrm{g} + R_\mathrm{a} + R_\mathrm{V} \| R_x} E$$

- Astfel că

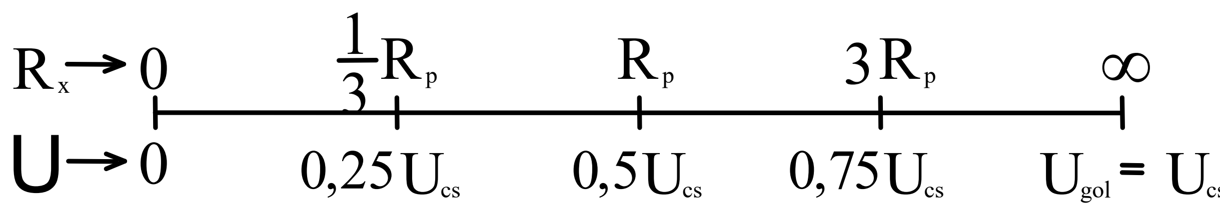
$$\frac{U_\mathrm{CS}}{U} = \frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{t}}\left(\frac{R_\mathrm{g}+R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{V}\|R_x}+1\right) = \frac{R_\mathrm{V}\left(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{a}\right)}{R_\mathrm{t}}\left(\frac{1}{R_\mathrm{V}}+\frac{1}{R_x}\right)+\frac{R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{t}} =$$

$$= 1 + \frac{R_\mathrm{V}\left(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{a}\right)}{R_\mathrm{g}+R_\mathrm{a}+R_\mathrm{V}} \cdot \frac{1}{R_x} = 1 + R_p \frac{1}{R_x} \qquad R_\mathrm{p} \triangleq R_\mathrm{V} \| \left(R_\mathrm{g}+R_\mathrm{a}\right)$$

Ohmetre cu citire directă

- Rezultă: $$R_x = R_p \frac{1}{\left(\frac{U_{CS}}{U} - 1\right)}$$

- scară neliniară

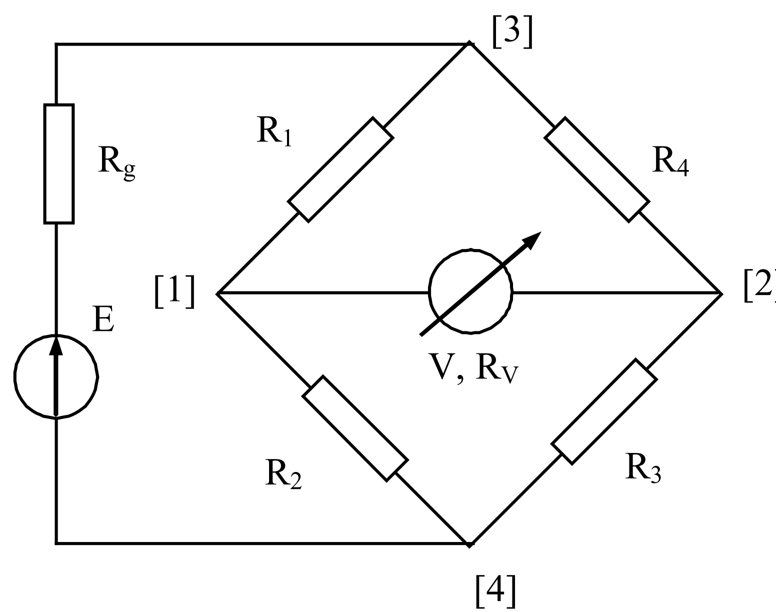


Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- ***Puntea Wheatstone***
  - patru braţe rezistive,
  - o diagonală de alimentare
  - o diagonală de detecţie

- Puntea este la echilibru dacă

$$U_d = U_{12} = 0$$



Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

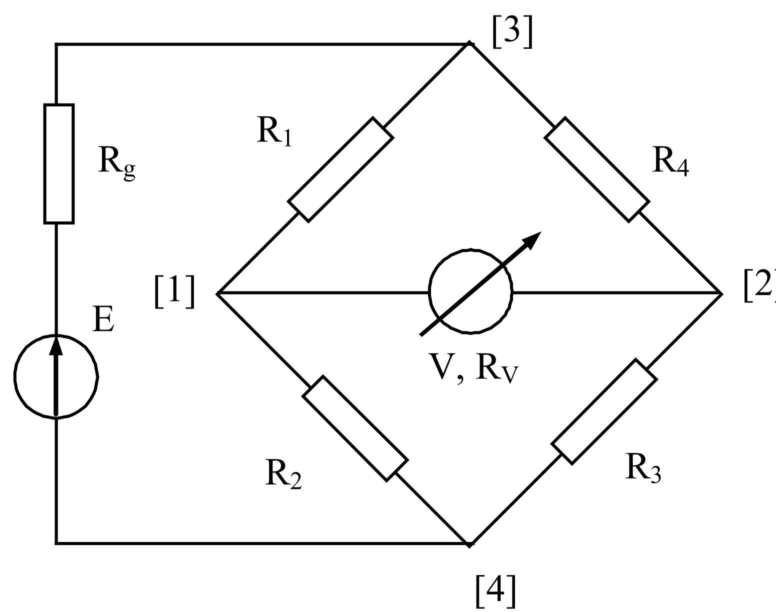
$$\boxed{U_d = U_{12} = 0}$$

- Din condiţia de echilibru $U_{14} = U_{24}$
- Se obţine $U_{14} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{34} = U_{24} = \frac{R_3}{R_4 + R_3} U_{34}$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$



Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

- **Observaţii:**
  - Condiţia de echilibru nu depinde de E, de R_g şi R_v
  - Prin inversarea poziţiilor generatorului şi indicatorului de nul, condiţia de echilibru nu se schimbă.
  - Dacă $R_4 = R_x$ este o rezistenţă necunoscută, $R_3 = R_e$ este o rezistenţă variabilă etalonată, iar raportul $\frac{R_1}{R_2} = 10^{\pm n}$ este reglabil în decade, din condiţia de echilibru se obţine $R_x = 10^{\pm n} R_e$ adică R_e poate fi etalonată direct în valori ale lui R_x

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- ***Sensibilitatea punţii***
  - punte sensibilă → pune în evidenţă variaţii cât mai mici ale rezistentelor faţă de valoarea de la echilibru.
  - Se defineşte *sensibilitatea* punţii

$$S = \frac{\Delta U_{\mathrm{d}} / E}{\Delta R_4 / R_4}$$

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- Determinarea sensibilităţii se va face în condiţiile

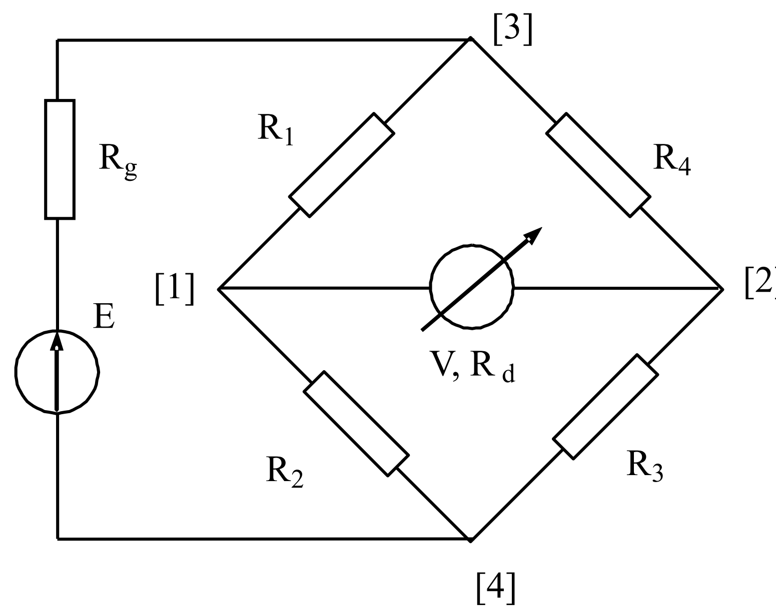
$$R_g = 0 \qquad R_d \to \infty$$

- În aceste ipoteze rezultă $I_d = 0$ şi

$$U_d = U_{14} + U_{42} = U_{14} - U_{24} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - \frac{R_3}{R_3 + R_4} E$$

$$\boxed{U_d = E\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right)}$$

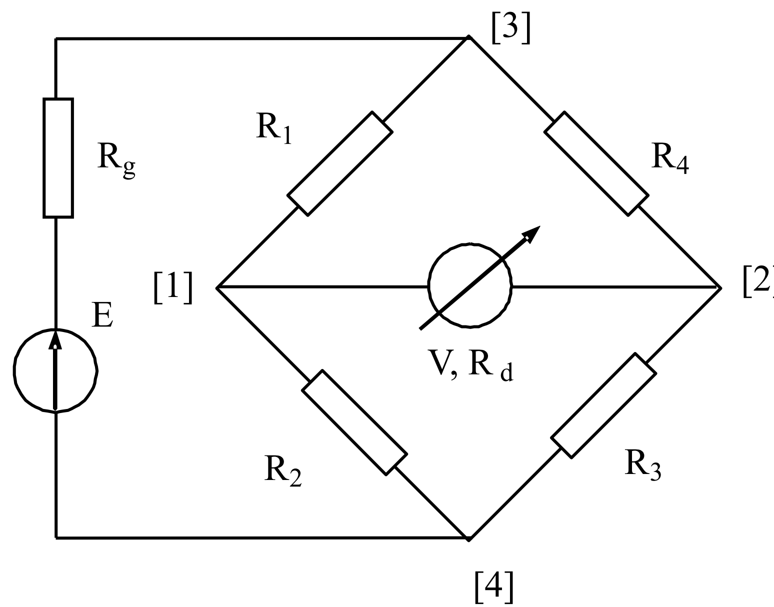


Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

$$\Delta U_d = E\frac{R_3}{(R_3+R_4)^2}\Delta R_4 = E\frac{\frac{R_3}{R_4}}{\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)^2}\cdot\frac{\Delta R_4}{R_4}$$

- Notând raportul $\frac{R_3}{R_4} \triangleq A$

- Rezultă $$\boxed{S = \frac{A}{(1+A)^2}}$$



Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

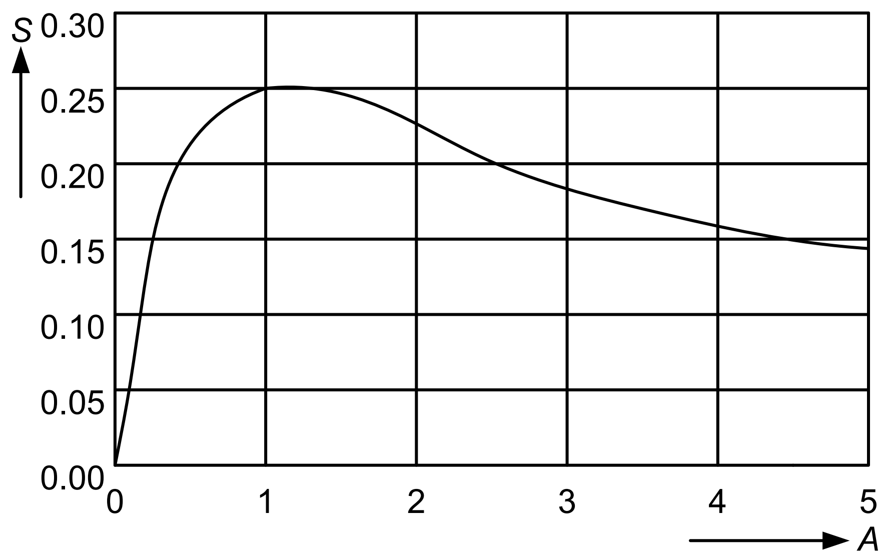
$$S = \frac{A}{(1+A)^2}$$

- Funcţia $S = f(A)$ este maximă pentru

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}A} = \frac{1}{(1+A)^2} - \frac{2A}{(1+A)^3} = \frac{1-A}{(1+A)^3} = 0$$

- Rezultă un maxim pentru $A = 1$

$$S_{\max} = \frac{1}{4}$$



Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- Sensibilitatea interesează *în jurul poziţiei* de echilibru, adică pentru

$$R_4 = \underbrace{R_{40}}_{\text{valoarea de la echilibru}} + \Delta R_4 \qquad\qquad \Delta R_4 << R_{40}$$

- şi $U_\mathrm{d} = 0 + \Delta U_\mathrm{d} = \Delta U_\mathrm{d}$ (variază în jurul lui zero)

- Astfel că $$S_0 = \frac{\dfrac{U_\mathrm{d}}{E}}{\dfrac{\Delta R_4}{R_{40}}} = \frac{A}{(1+A)^2}$$

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

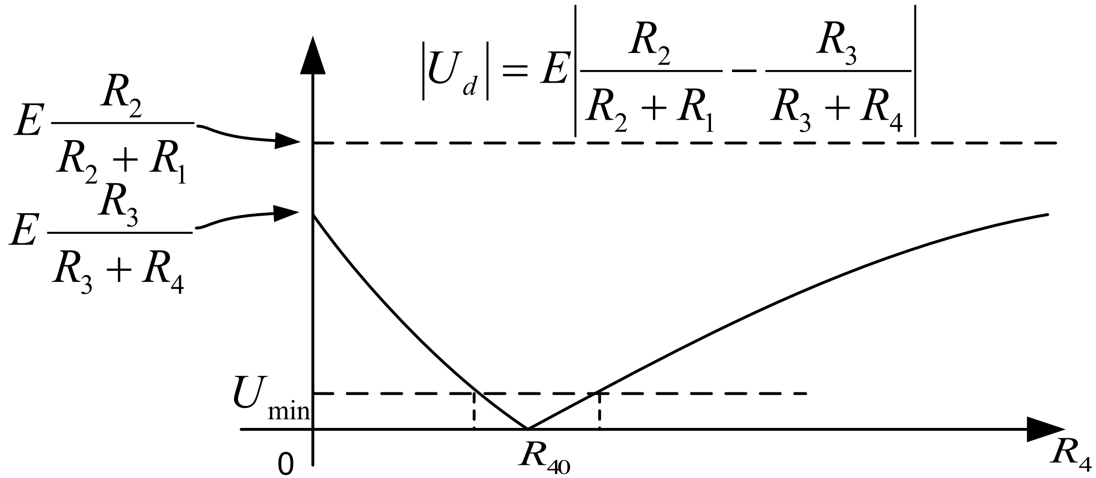
- *Observaţii*
  - În definiţia sensibilităţii ΔU_d, este normat la E şi nu la U_d cum ar trebui, deoarece la echilibru $U_d = 0$.
  - aceeaşi S dacă se înlocuieşte A cu $1/A$
  - S_{max} $(A = 1)$ → $R_1=R_2$ şi $R_4=R_3$
  - Această condiţie are mai mult o importanţă teoretică deoarece în practică este necesară realizarea unor scări decadice.

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- ***Observaţii***
  - Tensiunea de dezechilibru $U_d = ES_0 \dfrac{\Delta R_4}{R_{40}}$

    este cu atât mai mare pentru un raport $\dfrac{\Delta R_4}{R_{40}} = \delta$ (numit şi factor de dereglaj) cu cât
    - *E* este mai mare, dar limitat la valoarea la care rezistenţele se încălzesc modificându-şi valoarea;
    - S_0 este mai mare, dar limitat la 1/4 după cum s-a demonstrat
  - Orice indicator de nul are un prag de sensibilitate U_{min} sub care tensiunea de dezechilibru nu mai poate fi pusă în evidenţă

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte



- Pentru $|U_\mathrm{d}| < U_{\min}$ → eroare de prag de sensibilitate $\varepsilon_{\mathrm{ps}}$

$$S_0 E\frac{|\Delta R_4|}{R_{40}} < U_{\min} \qquad \Rightarrow \frac{|\Delta R_4|}{R_{40}} < \frac{U_{\min}}{S_0 E}$$

Măsurarea rezistenţelor prin metode de punte

- de unde se deduce în situaţia cea mai defavorabilă că

$$\varepsilon_{ps} = \frac{U_{min}}{S_0 E}$$

- adică ε_{ps} scade când S_0 şi E cresc.
- Dacă se ţine seama de R_g şi R_d, calculul conduce la o expresie mai complicată pentru *S*, iar aceste rezistenţe reduc sensibilitatea punţii.
- Puntea Wheatstone are numeroase aplicaţii în practică pentru a măsura rezistenţe între $1\Omega \div 1M\Omega$