

4 Măsurarea impedanțelor

4.1 Generalități

4.1.1 Caracterizarea impedanțelor

O impedanță poate fi exprimată prin:
forma algebrică (carteziană),

$$Z = R + jX \quad (4.1)$$

forma exponențială (polară),

$$Z = |Z|e^{j\varphi_Z} \quad (4.2)$$

unde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi_Z = \arctg \frac{X}{R} \quad (4.3)$$

Pentru a caracteriza o impedanță, rezultă că sunt necesare două mărimi reale (partea reală și cea imaginară sau modulul și faza).

Reprezentarea algebrică permite echivalarea impedanțelor cu o *structură serie* compusă dintr-un element rezistiv și unul reactiv. În cazul unei *structuri derivație*, este mai convenabilă caracterizarea prin mărimea complementară, admitanța

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = |Y|e^{j\varphi_Y} \quad (4.4)$$

4.1.2 Reactori disipativi

Bobinele și condensatoarele nu sunt ideale. Ele sunt întotdeauna însoțite de rezistențe de pierderi și de asemenea, rezistențele prezintă reactanțe parazite (în deosebi cu caracter inductiv). De aceea, rezultă utilitatea unei analize a acestor structuri.

Definiție

Combi-nația dintre o rezistență și o reactanță se numește *reactor disipativ*.

În funcție de tipul combinației, există:

- reactori disipativi *serie* (Figura 4.1a);
- reactori disipativi *derivație* (Figura 4.1b).



Figura 4.1 Reactori disipativi: a - serie; b - derivație.

În general:

- reactanța unui reactor disipativ se poate datora unei bobine sau unui condensator, sau unei combinații de bobine și condensatoare;
- rezistența unui reactor disipativ poate corespunde unui rezistor, sau poate fi partea activă a unei reactanțe cu pierderi.

Reactanțele X_s și X_p sunt funcții de frecvență, și în general, și R_s , și R_p sunt funcții de frecvență.

O mărime caracteristică a reactorului disipativ este *factorul de calitate* Q , definit prin relația,

$$Q = \frac{|P_r|}{P_a} \quad (4.5)$$

unde: P_r este puterea reactivă medie;

P_a este puterea activă medie.

Factorul de calitate Q arată în ce măsură predomină caracterul reactiv în raport cu cel rezistiv.

Pentru *reactorul disipativ serie*, având în vedere că mărimea comună pentru cele două elemente este curentul I , se poate scrie,

$$\left. \begin{aligned} |P_r| &= \frac{1}{2} |X_s| I^2 \\ P_a &= \frac{1}{2} R_s I^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_s = \frac{|X_s|}{R_s} \quad (4.6)$$

(relația de calcul a lui Q pentru reactorul disipativ serie)

Pentru *reactorul disipativ derivație*, mărimea comună pentru elementele sale este tensiunea U , de aceea în acest caz se obține,

$$\left. \begin{aligned} |P_r| &= \frac{1}{2} \frac{U^2}{|X_p|} \\ P_a &= \frac{1}{2} \frac{U^2}{R_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_p = \frac{R_p}{|X_p|} \quad (4.7)$$

(relația de calcul a lui Q pentru reactorul disipativ derivație)

Cele două expresii diferite pentru Q au ca explicație fizică faptul că pentru a predomina caracterul reactiv al reactorului (adică Q de valoare mare), reactanța față de rezistență trebuie să fie mare la reactorul disipativ serie și mică la reactorul disipativ derivație.

În practică, se pune problema trecerii de la configurația serie a unui reactor disipativ la cea derivație și invers. De aceea, pentru o frecvență dată se vor deduce *relațiile de echivalență*.

Pentru ca cele două tipuri de reactori să fie echivalente este necesar să fie realizată echivalența energetică sau se poate pune condiția ca impedanțele sau admitanțele lor să fie egale.

Deci,

$$\frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p} = \frac{1}{R_s + jX_s} \quad (4.8)$$

sau

$$\frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} \quad (4.9)$$

de unde rezultă

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}, \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} \quad (4.10)$$

Cu aceste relații se deduce

$$Q_p = \frac{R_p}{|X_p|} = \frac{|X_s|}{R_s} = Q_s \triangleq Q \text{ (se renunță la indice)} \quad (4.11)$$

adică factorul de calitate pentru doi reactori disipativi echivalenți are aceeași valoare, indiferent de tipul configurației.

Cu ajutorul lui Q , relațiile de echivalență se mai pot scrie,

$$\begin{cases} R_p = R_s(1 + Q^2) \\ X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \end{cases} \quad (4.12)$$

Aceste relații permit trecerea de la o configurație la cealaltă, Q -ul exprimându-se în funcție de elementele configurației cunoscute.

Observație

Din a doua relație de echivalență rezultă că X_s și X_p au același semn, adică natura reactanței se menține la trecerea de la o configurație la alta.

Cazuri particulare:

Dacă $Q \gg 1$ (cazul cel mai întâlnit în practică, fiind suficient $Q > 5$) atunci cu o bună aproximație rezultă

$$\begin{cases} R_p \cong R_s Q^2 \\ X_p \cong X_s \end{cases} \text{ (se păstrează reactanța).} \quad (4.13)$$

Dacă $Q \ll 1$, atunci rezultă

$$\begin{cases} R_p \cong R_s \\ X_p \cong \frac{X_s}{Q^2} \end{cases} \text{ (se păstrează rezistența).} \quad (4.14)$$

Deoarece Q este dependent de frecvență (atât reactanța, dar și rezistența variază cu frecvența), echivalența între reactorii disipativi este valabilă numai la frecvența la care s-a efectuat calculul (de cele mai multe ori, frecvența de lucru).

Uneori, în locul factorului de calitate Q , se mai folosesc:

- factorul de pierderi, $D = \frac{1}{Q}$, sau
- unghiul de pierderi, $\delta = \arctg \frac{1}{Q} = \arctg D$

4.1.3 Elemente pasive de circuit (elemente dipolare)**a) - Rezistorul**

Rezistorul *ideal* este un dipol (vezi figura 4.2a) la care $u = Ri$, unde constanta reală R reprezintă mărimea numită **rezistență** (această denumire fiind utilizată și pentru rezistor).

Rezistorul *real* este însoțit de elemente parazite, astfel că schema echivalentă este cea din figura 4.2b. unde:

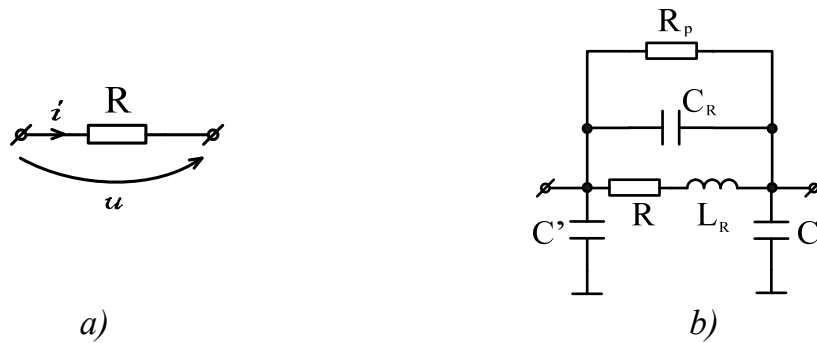
R - este rezistența caracteristică având o valoare preponderentă în comparație cu celelalte elemente;

L_R - este inductanța datorată înmagazinării unei energii magnetice în jurul rezistorului la trecerea curentului;

C_R - este capacitatea dintre extremitățile rezistorului;

C' - sunt capacitățile echivalente corespunzătoare capacității distribuite față de masă a rezistorului;

R_p - este rezistența corespunzătoare pierderilor în dielectricul izolației și în suportul rezistorului.



a) b)
Figura 4.2 Rezistorul și schema sa echivalentă.

La rezistoarele cu construcție îngrijită și utilizând procedee tehnologice moderne, R_p și C' se pot neglija, iar influența dată de L_R și C_R poate fi redusă, de aceea în practică se utilizează adesea schema echivalentă din figura 4.3.

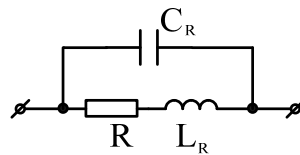


Figura 4.3

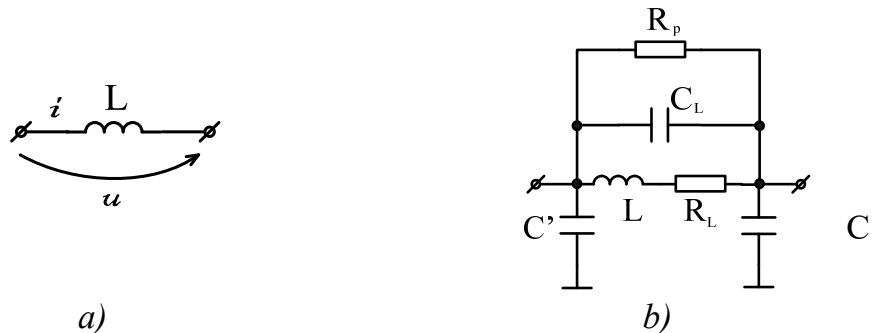
Cu toate acestea, circuitul echivalent al rezistorului are o impedanță ce variază cu frecvența, deoarece elementele din schema echivalentă variază cu frecvența. Pentru a determina concret comportarea rezistorului cu frecvența, se scrie expresia impedanței circuitului echivalent și se analizează variația ei.

b) – Bobina

Bobina *ideală* este un dipol (vezi figura 4.4a) la care $u = L \frac{di}{dt}$ unde

constanta reală L reprezintă **inductanța** bobinei.

Bobina *reală* are schema echivalentă din figura 4.4b care este identică cu a rezistorului, numai că de această dată preponderentă este inductanța L .



a) b)
Figura 4.4 Bobina și schema sa echivalentă

În majoritatea cazurilor practice, schema echivalentă cea mai utilizată este cea din figura 4.5, adică reprezentarea bobinei se face printr-un reactor disipativ serie.

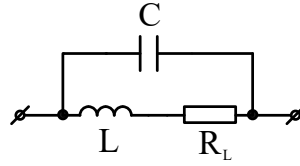


Figura 4.5

Factorul de calitate la frecvența de lucru ω este

$$Q_L = \frac{\omega L}{R_L} \quad (4.15)$$

unde R_L este determinată de efectul pelicular, pierderile în dielectric, pierderile prin radiație etc.

Factorul de calitate variază cu frecvența.

Q se poate considera practic *constant* într-un domeniu de frecvență $(f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f)$ relativ îngust în jurul frecvenței centrale f_0 , adică pentru care este îndeplinită condiția,

$$\frac{\Delta f}{f_0} \ll 1 \quad (4.16)$$

Valori uzuale ale lui Q_L :

- pentru bobine fără circuit magnetic închis: $Q_L = 10 \div 120$;
- pentru bobine realizate cu oale de ferită: $Q_L = 100 \div 300$.

c) - Condensatorul

Condensatorul *ideal* este un dipol (vezi figura 4.6a) la care $u = \frac{1}{C} \int i dt$

unde constanta reală C reprezintă *capacitatea* condensatorului.

Condensatorul *real* are schema echivalentă din figura 4.6b, unde elementele parazite sunt:

R' - rezistența armăturilor și conductoarelor de legătură;

L' - inductanța corespunzătoare înmagazinării de energie magnetică din jurul armăturilor;

C - capacitatea parazită față de masă a armăturilor;

R_p - rezistența de pierderi în dielectric și în suporturile armăturilor.

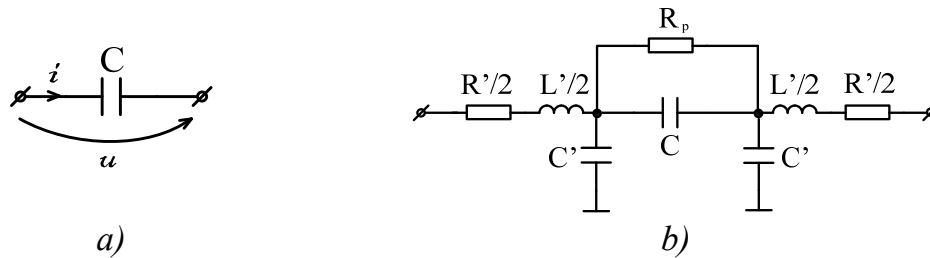


Figura 4.6 Condensatorul și schema sa echivalentă.

În cazurile practice se utilizează schema echivalentă simplificată din figura 4.7.

Factorul de calitate al condensatorului la frecvența de lucru ω este

$$Q_c = \frac{R_p}{1/\omega C} = \omega C R_p \quad (4.17)$$

și are valori de câteva ori mai mari decât în cazul bobinelor reale.

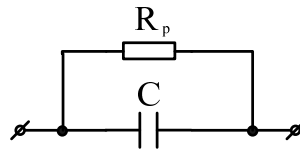


Figura 4.7

Asemănător ca la bobină, și pentru condensator, într-o bandă de frecvență respectând condiția $\frac{\Delta f}{f_0} \ll 1$, Q se poate considera *constant* cu o foarte bună aproximație.

4.1.4 Tehnici și configurații generale de măsură

Principalele tehnici de măsurare a impedanțelor pot fi grupate în următoarele categorii:

- **Metode de comparație**, în care impedanța ce trebuie măsurată este comparată cu una sau mai multe impedanțe cunoscute. Exemplul cel mai reprezentativ îl constituie puntea de măsură. **Impedanțmetrul (LCR-metrul) numeric**, care reprezintă instrumentul modern de măsură a impedanțelor, are la bază tot principiul punții.
- **Măsurarea indirectă bazată pe legea lui Ohm**. Presupune injectarea unui curent cunoscut și măsurarea tensiunii se apare la borne. Este de fapt vorba de o conversie impedanță-tensiune. Acest principiu este utilizat pentru măsurarea rezistențelor în **multimetrele numerice**. Ca o alternativă, se poate aplica o tensiune cunoscută și se măsoară curentul, această tehnică fiind folosită în **ohmmetrele electrice**.

- O categorie specială de metode de măsură se bazează pe fenomenul de rezonanță. Pe acest principiu funcționează ***Q-metrul***.
- Tehnici speciale sunt utilizate pentru măsurarea impedanțelor la frecvențe mari (microunde). Un instrument specific este ***analizorul de rețea***.

Vom analiza în continuare conversia impedanță-tensiune. Să considerăm schema din figura 4.8 în care un curent \underline{I} este aplicat Impedanței Z_x ce trebuie măsurată. Presupunând că \underline{I} este cunoscut și este ales ca origine de fază

$$Z_x = R_x + jX_x = \frac{\text{Re}U}{I} + j \frac{\text{Im}U}{I} \quad (4.18)$$

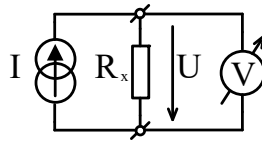


Figura 4.8

Utilizând un voltmetru vectorial, capabil să măsoare separat partea reală și partea imaginară a tensiunii, se pot măsura cele două componente ale impedanței.

Configurația din figura 4.8 este o ***configurație dipolară***. Măsurarea poate fi afectată de o serie de impedanțe parazite care pot fi grupate în:

- *impedanțe parazite serie* ce au valoare mică, cum sunt rezistențele de contact, rezistențele și inductanțele conductorilor de legătură;
- *impedanțe parazite paralel*, de valoare mare, cum sunt rezistențele de scurgeri în dielectricul dintre borne, sau în cel al cablurilor, capacități parazite etc.

Aceste impedanțe parazite nu afectează în mod semnificativ precizia măsurării impedanțelor de valori medii (zeci de ohmi ÷ sute de kiloohmi), dar devin foarte supărătoare la măsurarea rezistențelor foarte mici sau foarte mari.

a) - Cazul impedanțelor foarte mici

În acest caz trebuie avute în vedere efectele impedanțelor parazite serie.

Exemplu

La măsurarea rezistenței R_x în curent continuu (Figura 4.9), bornele de conectare ale rezistorului la generator și la voltmetru prezintă rezistențele de contact puse în evidență în schema

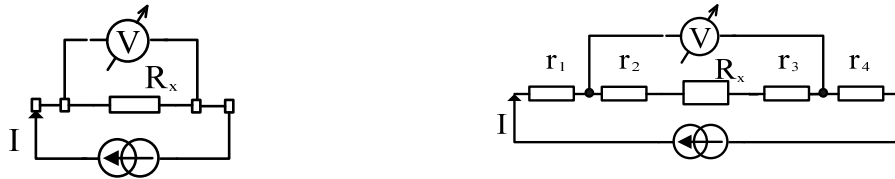


Figura 4.9

echivalentă. Aceste rezistențe de valori de ordinul miliohmilor sunt practic necontrolabile și depind de modul de strângere al bornelor. Rezistența măsurată va fi,

$$R_m = \frac{U}{I} = R_x + r_2 + r_3 \quad (\text{dacă } R_V \rightarrow \infty) \quad (4.19)$$

Dacă R_x este mică, erorile introduse devin semnificative și ele provin din cauză că r_2 și r_3 se află atât în circuitul de alimentare cât și în cel de măsură.

Pentru a elimina influența rezistenței de contact trebuie separată funcția *alimentare* de funcția *măsurare* disociind bornele respective. Se obține astfel rezistența cu patru borne (cuadripol), unde prizele de tensiune sunt realizate din două cuțite paralele (contacte Kelvin) care lasă în afară bornele de alimentare (Figura 4.10).

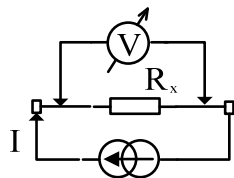


Figura 4.10

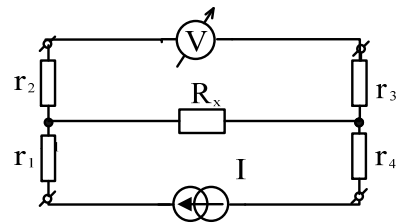


Figura 4.11

Curentul I străbate bornele de curent și produce între bornele de măsurare o cădere de tensiune ce reprezintă strict căderea de tensiune de la bornele rezistenței R_x și nu mai înglobează căderile de tensiune pe rezistențele de contact (r_2 și r_3 sene cu $R_V \rightarrow \infty$ și nu mai afectează măsurarea, așa după cum se poate constata și din figura 4.11).

Redesenând schema pentru punerea în evidență a cuadripolului (Figura 4.12), rezultă

$$R_x = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_{21} \quad (4.20)$$

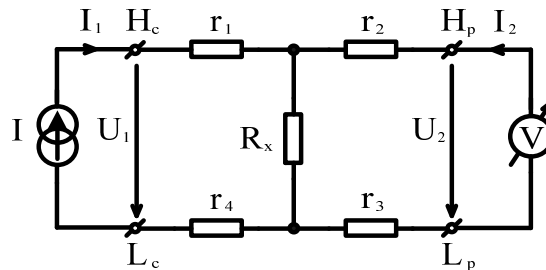


Figura 4.12

adică rezistența măsurată este impedența de transfer a cuadripolului cu ieșirea în gol, independentă de rezistențele parazite $r_1 \div r_4$ care pot include și rezistența firelor de legătură.

Această **conexiune cuadripolară** poate fi utilizată și în curent alternativ, având drept efect suplimentar anihilarea efectelor inductivităților și rezistențelor conductoarelor de legătură (Figura 4.13) .

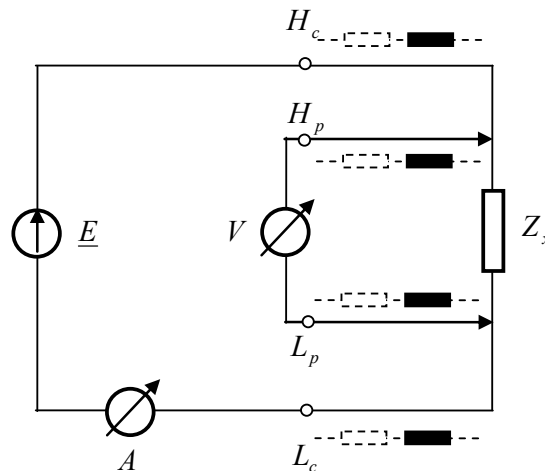


Figura 4.13

Se poate eventual utiliza în locul generatorului de curent un generator de tensiune și un instrument pentru controlul curentului injectat. Efectul impedențelor conductoarelor de măsură, figurate punctat, este anihilat în această configurație. Echipamentul de măsură va avea patru borne, două pentru injecția curentului (H_c, L_c) și două pentru măsurarea tensiunii (H_p, L_p).

b) - Cazul impedanțelor foarte mari

În acest caz prezintă importanță impedanțele parazite paralele.

Exemplu

La măsurarea în curent continuu a rezistenței R_x foarte mare, între borne apare rezistența de scăpări R_s și raportul dintre tensiune și curent va da de fapt rezultanta celor două rezistențe conectate în paralel (Figura 4.14 a).

Rezistența de scurgeri este de obicei foarte mare (poate fi de ordinul gigaohmilor), așa încât efectul ei e neglijabil în cazul unor rezistențe de valori medii, dar poate conta în cazul unor rezistențe de valori foarte mari (zeci, sute de megaohmi) (Figura 4.14 a).

Efectul se diminuează prin *tehnica gardării*, adică se dispune în jurul uneia dintre borne un inel G metalic, numit *gardă*. (Figura 4.14 b).



Figura 4.14

Rezistența R_s se împarte în două, R_{sA} , de la borna A la gardă, și R_{sB} , de la borna B la gardă, adică dipolul este înlocuit cu un tripol (Figura 4.15 a).

Dacă se realizează schema de măsurare (figura 4.15 b) astfel încât rezistențele R_{sA} și R_{sB} de valori mari să apară în paralel cu rezistențe mici, efectul lor devine neglijabil.

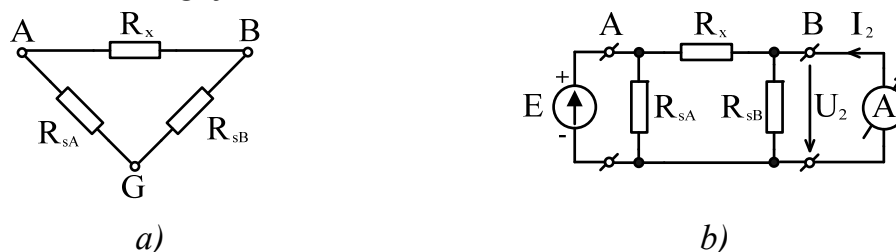


Figura 4.15

La măsurarea rezistenței R_x rezultă

$$\frac{1}{R_x} = - \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = G_{21} \quad (4.21)$$

adică conductanța căutată este conductanța de transfer a diportului cu ieșirea în scurtcircuit (rezistența ampermetrului a fost considerată nulă).

Configurația aceasta, numită **configurație tripolară**, poate fi folosită și în curent alternativ. În acest caz, ea va face posibilă utilizarea cablurilor ecranate în schema de măsură. Este un lucru foarte important, deoarece se elimină astfel tensiunile parazite ce se pot induce în aceste cabluri, ca urmare a câmpurilor electromagnetice perturbatoare. Un cablu ecranat are un fir central, peste care există un strat izolator, peste acesta o tresă metalică și în fine un al doilea strat izolator. Legătura electrică se face deci prin firul central și prin ecran (tresă).

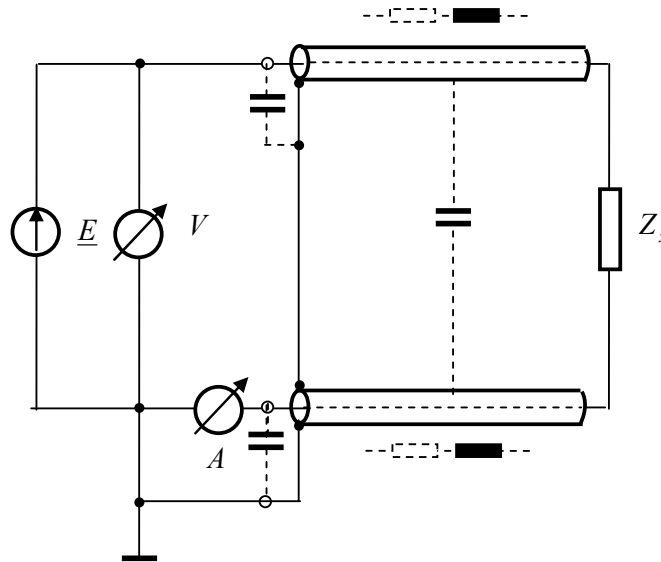


Figura 4.16

Această configurație este reprezentată în figura 4.16. Tensiunea injectată este controlată cu un voltmetru. Se constată ușor că impedanțele dintre firul central și tresă metalică (în desen au fost figurate numai capacitățile) sunt șuntate de impedanțele mici ale generatorului și ampermetrului. O eventuală capacitate sau inductivitate mutuală dintre cele două cabluri este de asemenea scurtcircuitată. Schema nu compensează însă efectele impedanțelor proprii ale cablurilor (inductivitate și rezistență). Configurația de mai sus este indicată pentru măsurarea impedanțelor mari, mergând până la zeci, eventual sute de megaohmi. Pentru măsurări și mai precise se pot utiliza configurații mai complicate (mergând de la pentapolar la octopolar).

4.2 Măsurarea rezistențelor în curent continuu

4.2.1 Măsurarea rezistențelor prin metode simple

a) - Metoda ampermetrului și voltmetrului

Această metodă:

- se utilizează pentru rezistențe de valori $R \in 10 \text{ m}\Omega \div 100 \text{ k}\Omega$
- se bazează pe legea lui Ohm (Figura 4.17)

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \quad (4.22)$$

În practică, în funcție de legarea voltmetrului în raport cu generatorul, se disting două tipuri de montaje care au la bază această metodă:

- montajul *aval*,
- montajul *amonte*.

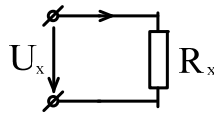


Figura 4.17

Montajul aval

Schema montajului este reprezentată în figura 4.18, având caracteristicile următoarelor relații,

$$\begin{cases} U_x = U \\ I_x = I - I_V \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} U_x = U \\ I_x \neq I \end{cases}$$

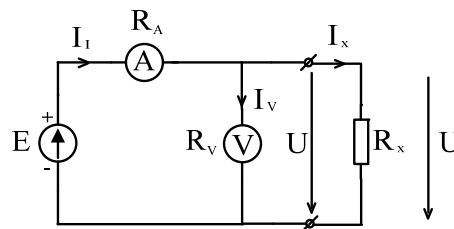


Figura 4.18 Schema montajului aval

Rezultă că

$$R_m \triangleq \frac{U}{I} \neq R_x = \frac{U_x}{I_x} \quad (\text{adică valoarea măsurată } R_m \text{ este eronată}) \quad (4.23)$$

Valoarea exactă a rezistenței R_x se determină scriind

$$\frac{1}{R_x} = \frac{I_x}{U_x} = \frac{I - I_V}{U} = \frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_V} \Rightarrow R_x = \frac{R_V R_m}{R_V - R_m} \stackrel{R_V \gg R_m}{\cong} R_m \left(1 + \frac{R_m}{R_V} \right) \quad (4.24)$$

Montajul amonte

Schema acestui montaj este prezentată în figura 4.19, iar relațiile caracteristice sunt:

$$\begin{cases} U_x = U - R_A I \\ I_x = I \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} U_x \neq U \\ I_x = I \end{cases}$$

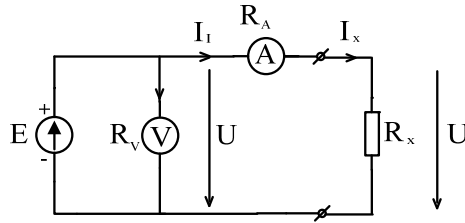


Figura 4.19 Schema montajului amonte

Și în acest caz

$$R_m \triangleq \frac{U}{I} \neq R_x = \frac{U_x}{I_x} \quad (\text{deci valoarea } R_m \text{ este eronată}), \quad (4.25)$$

iar pentru valoarea exactă a rezistenței se obține

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - R_A I}{I} = (R_m - R_A) \Rightarrow R_x = R_m - R_A \quad (4.26)$$

Prin urmare, din cele obținute mai sus rezultă că oricare ar fi montajul, dacă se ia valoarea R_m în loc de valoarea R_x se comite o eroare sistematică (chiar dacă ampermetrul A și voltmetrul V măsoară cu precizie), care este:

- la montajul aval

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{\frac{R_x R_V}{R_x + R_V} - R_x}{R_x} = -\frac{R_x}{R_x + R_V} < 0 \quad (4.27)$$

și această eroare este cu atât mai mică cu cât $R_V \gg R_x$ (adică metoda este convenabilă pentru măsurarea *rezistențelor mici*).

- la montajul amonte

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{R_A}{R_x} > 0 \quad (4.28)$$

de unde rezultă că această eroare este cu atât mai mică cu cât $R_A \ll R_x$ (adică metoda este convenabilă pentru măsurarea *rezistențelor mari*).

Eroarea maximă cu care se determină R_x datorată erorilor instrumentale, adică *impreciziei de măsurare* a ampermetrului și voltmetrului, este:

- la montajul aval, deoarece

$$\frac{1}{R_x} = \frac{I}{U} - \frac{I_V}{U} = \frac{I}{U} - \frac{1}{R_V} \quad (4.29)$$

rezultă,

$$\frac{\Delta R_x}{R_x^2} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U^2} I = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) \frac{I}{U} = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V} \right) \quad (4.30)$$

și

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) \left(1 + \frac{R_x}{R_V} \right) \quad (4.31)$$

Relația (4.31) se mai poate scrie

$$\varepsilon_{R_x} = (\varepsilon_I + \varepsilon_U) \left(1 + \frac{R_x}{R_V} \right) \cong \varepsilon_I + \varepsilon_U, \text{ pentru } R_V \gg R_x \quad (4.32)$$

- la montajul amonte, deoarece

$$R_x = \frac{U}{I} - R_A \quad (4.33)$$

rezultă

$$\Delta R_x = \frac{\Delta U}{I} + \frac{\Delta I}{I^2} U = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) \frac{U}{I} = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) (R_x + R_A) \quad (4.34)$$

și

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \left(\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta U}{U} \right) \left(1 + \frac{R_A}{R_x} \right) \quad (4.35)$$

Relația mai poate fi scrisă

$$\varepsilon_{R_x} = (\varepsilon_I + \varepsilon_U) \left(1 + \frac{R_A}{R_x} \right) \cong \varepsilon_I + \varepsilon_U \text{ pentru } R_x \gg R_A \quad (4.36)$$

unde $\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I}$ și $\varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U}$ sunt erorile relative limită datorate ampermetrului

A și respectiv voltmetrului V. În determinarea erorilor s-a aplicat formula de propagare a erorilor la măsurătorile indirecte.

Dacă efectul erorii sistematice nu ar fi corectat va rezulta o eroare totală. De exemplu, în cazul metodei amonte se obține:

- eroarea relativă limită,

$$\varepsilon_{R_x} = \left| \frac{\partial R_x}{\partial U} \frac{U}{R_x} \right| \varepsilon_U + \left| \frac{\partial R_x}{\partial I} \frac{I}{R_x} \right| \varepsilon_I + \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_A} \frac{R_A}{R_x} \right| \varepsilon_{R_A} = \varepsilon_U + \varepsilon_I + \frac{R_A}{R_x} \varepsilon_{R_A} \quad (4.37)$$

APLICAȚIE: Se măsoară R_x prin metoda voltmerului și ampermetrului folosind montajele amonte și aval. Se calculează R_x cu relația $R_x = \frac{U}{I}$

.Aparatele au caracteristicile:

$$1. V : U_{CS}=150V, c=0,5\% , R_V = 10 \text{ k}\Omega \pm 10\%$$

$$2. A : I_{CS}=2 \text{ A}, c=0,5\% , R_A = 1\Omega \pm 10\%$$

Sursa de tensiune are $E=100V$

- În ce caz se măsoară $R_x = 200 \Omega$ cu eroare sistematică minimă?
- Care este eroarea relativă limită după ce s-a făcut corecția erorii sistematice?
- Pentru ce R_x se obține aceeași eroare sistematică, în modul, prin ambele metode?

REZOLVARE:

a) În configurația montajului amonte se măsoară în realitate

$$\frac{U}{I} = R_x + R_A = R'_{xm} \quad (4.38)$$

pentru care rezultă o eroare sistematică absolută

$$e'_{R_x} = R'_{xm} - R_x = R_A \quad (4.39)$$

și corespunzător, o eroare relativă sistematică

$$\varepsilon_{R_x, sist} = \frac{R_A}{R_x} \cdot 100 = 0,5\% \quad (4.40)$$

Pentru montajul aval se obține în mod similar

$$\frac{U}{I} = \frac{R_x \cdot R_V}{R_x + R_V} = R''_{xm} \quad (4.41)$$

și eroarea relativă sistematică

$$e''_{R_x, sist} = \left| R''_{xm} - R_x \right| = \frac{R_x^2}{R_x + R_V} \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_{R_x, sist} = \frac{e''_{R_x, sist}}{R_x} \cdot 100 = \frac{R_x}{R_x + R_V} \cdot 100 \cong 2\% \quad (4.43)$$

b) Corectarea erorii sistematice conduce la

$$R_x = \frac{U}{I} - R_a = R_x(U, I, R_a) \quad (4.44)$$

Folosind formula propagării erorii relative limită la măsurători indirecte (similar pentru montajul aval), se obține în acest caz expresia erorii pentru R_x

$$\begin{aligned}\varepsilon_{R_x} &= \left(\left| \frac{\partial R_x}{\partial U} \frac{U}{R_x} \varepsilon_U \right| + \left| \frac{\partial R_x}{\partial I} \frac{I}{R_x} \varepsilon_I \right| = \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_a} \frac{R_a}{R_x} \varepsilon_{R_a} \right| \right) = \\ &= \left[\frac{U}{IR_x} \cdot \left(\varepsilon_U + \varepsilon_I + \frac{R_a}{R_x} \varepsilon_{R_a} \right) \right] \cong \varepsilon_U + \varepsilon_I + \frac{R_a}{R_x} \varepsilon_{R_a}\end{aligned}\quad (4.45)$$

În care

$$|\varepsilon_{\max}^U| = c \frac{U_{CS}}{U} = 0,5 \frac{150}{100} = 0,75\% \quad (4.46)$$

$$|\varepsilon_{\max}^I| = c \frac{I_{CS}}{I} = 0,5 \frac{2}{0,5} = 2\%$$

Unde s-a ținut cont că $U = E = 100V$ și $I = \frac{U}{R_x} = 0,5A$. Se obține

$$\varepsilon_{R_x} = 2,8\% \quad (4.47)$$

c) Condiția este

$$|\varepsilon_{R_x, sist}''| = |\varepsilon_{R_x, sist}''| \Rightarrow \frac{R_x}{R_x + R_V} = \frac{R_a}{R_x} \quad (4.48)$$

Din care se obține ecuația

$$R_x^2 - R_a R_x + R_a R_V = 0 \quad (4.49)$$

$$R_x = \frac{1}{2} \cdot \left(0,5 \pm \sqrt{0,5^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^4} \right) = 100,25\Omega \quad (4.50)$$

Deoarece este îndeplinită relația $R_a \ll R_x \ll R_V$, condiția poate fi rescrisă mai simplu:

$$\frac{R_x}{R_x + R_V} = \frac{R_a}{R_x} \cong \frac{R_x}{R_V} \Rightarrow R_x = \sqrt{R_a R_V} \cong 100\Omega \quad (4.51)$$

b) - Metoda comparației

Caracteristicile acestei metode sunt:

- se utilizează pentru măsurarea rezistențelor R_x de același ordin de mărime cu rezistența cunoscută R_0 ;
- montajul poate fi *serie* sau *paralel*.

Montajul serie (metoda celor două voltmetre)

Schema acestui montaj este reprezentată în figura 4.20. Este necesar să se utilizeze pe cât posibil două voltmetre identice (adică de aceeași rezistență R_V).

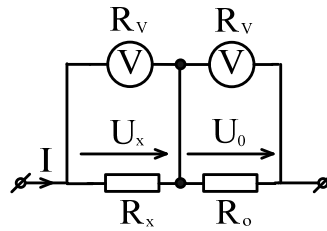


Figura 4.20 Schema montajului serie.

Relația de calcul pentru rezistența necunoscută este

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I \cdot \frac{R_V}{R_V + R_x}} = \frac{U_x}{\frac{U_0}{\frac{R_V R_0}{R_V + R_0}} \cdot \frac{R_V}{R_V + R_x}} = \frac{U_x}{U_0} R_0 \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0} \quad (4.52)$$

Dacă

$$R_m \triangleq \frac{U_x}{I} = \frac{U_x}{U_0} R_0 \Rightarrow R_x = R_m \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0} \quad (4.53)$$

Pentru $R_V \gg R_x, R_0$ (condiție îndeplinită de un bun voltmetru la care $R_V \rightarrow \infty$) sau dacă $R_x \cong R_0$, se obține $R_x \cong R_m$.

În toate celelalte cazuri, dacă se ia $R_x = R_m$ se comite o eroare sistematică,

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_m \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0}}{R_m \frac{R_V + R_x}{R_V + R_0}} = \frac{R_0 - R_x}{R_V + R_x} \quad (4.54)$$

deci metoda este indicată pentru măsurarea rezistențelor mici ($R_x, R_0 \ll R_V$).

Montajul paralel (metoda celor două ampermetre)

Schema acestui montaj este reprezentată în figura 4.21, unde se utilizează pe cât posibil două ampermetre identice (adică de aceeași rezistență R_A).

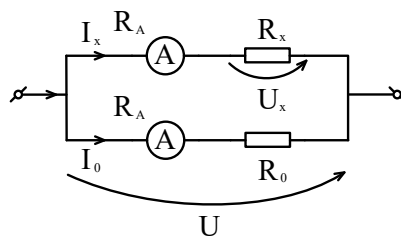


Figura 4.21 Schema montajului paralel.

Pentru a deduce relația care determină rezistența necunoscută, prin operații succesive se obține,

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - I_x R_A}{I_x} = \frac{I_0}{I_x} (R_0 + R_A) - R_A = \frac{I_0}{I_x} R_0 \left(1 + \frac{R_A}{R_0} \right) - R_A \quad (4.55)$$

Dacă

$$R_m \triangleq \frac{U}{I_x} = \frac{I_0}{I_x} R_0 \Rightarrow R_x = R_m \left(1 + \frac{R_A}{R_0} \right) - R_A \quad (4.56)$$

Pentru $R_A \ll R_x, R_0$ (condiție îndeplinită de un bun ampermetru la care $R_A \rightarrow 0$) sau dacă $R_x \cong R_0$, se obține $R_x \cong R_m$.

În toate celelalte cazuri dacă se ia $R_x = R_m$ se comite o eroare sistematică,

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{R_m - R_m + R_A \left(1 - \frac{R_m}{R_0} \right)}{R_x} = \frac{R_A}{R_x} \left(1 - \frac{R_m}{R_0} \right) \quad (4.57)$$

de unde rezultă că metoda este indicată pentru măsurarea *rezistențelor mari* ($R_x, R_0 \gg R_A$)

c) - Metoda substituției

Metoda substituției (vezi figura 4.22) necesită o rezistență etalon R_e , variabilă, și de același ordin de mărime cu rezistența de măsurat.

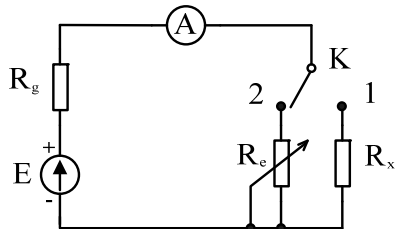


Figura 4.22 Metoda substituției

Modul de procedură pentru efectuarea măsurării este:

- Etapa I: $K \rightarrow$ poziția 1 - se notează indicația aparatului de măsură;
- Etapa a II-a: $K \rightarrow$ poziția 2 - se reglează R_e pentru aceeași indicație.

Rezultă că valoarea rezistenței necunoscute va fi:

$$R_x = R_e \quad (4.58)$$

Precizia măsurării depinde de:

- eroarea de etalonare a R_e
- de stabilitatea tensiunii aplicate montajului,
- de erorile de citire la aparatul indicator,

dar nu depinde de eroarea de etalonare a acestui aparat.

d) - Metoda rezistenței adiționale variabilă.

Metoda, având schema din figura 4.23, folosește o rezistență etalon R_e , de preferință variabilă

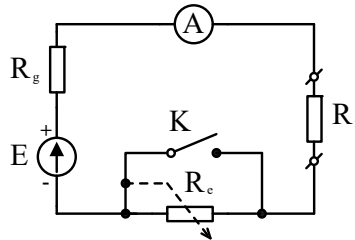


Figura 4.23 Metoda rezistenței adiționale

Sucesiunea operațiilor pentru măsurarea rezistenței R_x este următoare:

1) Dacă $R_g = 0$:

- Etapa I K → poziția închis - se notează indicația aparatului, I_1 ;
 - Etapa a II-a K → poziția deschis - se notează indicația aparatului, I_2 .
- Folosind aceste rezultate, se poate scrie

$$R_x I_1 = (R_x + R_e) I_2 \Rightarrow R_x = \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1} \quad (4.59)$$

Dacă se dorește să se țină seama și de rezistența R_A a aparatului, atunci în relația de mai sus se înlocuiește $R_x \rightarrow R_x + R_A$ obținându-se

$$R_x = \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1} - R_A \quad (4.60)$$

În cazul când R_e este variabilă, se poate regla această rezistență în etapa a II-a până când $I_2 = I_1/2$, rezultând $R_x = R_e$ reglată.

2) - Dacă $R_g \neq 0$ operațiile de la punctul 1) se repetă de două ori: mai întâi fără R_x în circuit, rezultatele permițând determinarea rezistenței R_g și a doua oară cu R_x conectată, obținându-se $R_g + R_x$. Notând indicațiile aparatului ce corespund fiecărei etape astfel:

$$\left. \begin{array}{l} \text{fără } R_x \text{ și } R_e \rightarrow I_1 \\ \text{fără } R_x, \text{ cu } R_e \rightarrow I_2 \\ \text{cu } R_x, \text{ fără } R_e \rightarrow I_3 \\ \text{cu } R_x, \text{ și } R_e \rightarrow I_4 \end{array} \right\} \text{ atunci rezultă că } R_x = \frac{R_e}{\frac{I_3}{I_4} - 1} - \frac{R_e}{\frac{I_1}{I_2} - 1} \quad (4.61)$$

4.2.2 Ohmetre cu citire directă

Aceste aparate posedă următoarele particularități:

- *Măsoară direct* valoarea rezistenței;
- Sunt constituite dintr-o *sursă* și un *aparat indicator etalonat* în valori ale rezistenței. Condițiile ce trebuie îndeplinite de sursă sunt:

$$R_g = \text{ct}, E = \text{ct} \quad (4.62)$$

Pentru a compensa variația lui R_g (cazul bateriilor obișnuite pentru care R_g crește pe măsură ce sunt consumate) se utilizează o rezistență adițională care se reglează așa încât $R_g + R_a = \text{ct}$. De aceea, orice măsurare trebuie precedată de o *operație de verificare a etalonării* într-un punct, care se realizează prin varierea rezistenței adiționale și care validează corectitudinea etalonării pe toata scara aparatului.

După schema de principiu se deosebesc două tipuri: ohmetre *serie* și ohmetre *paralel*.

a) - Ohmetre serie

Schema de principiu a unui ohmetru serie este reprezentată în figura 4.24.

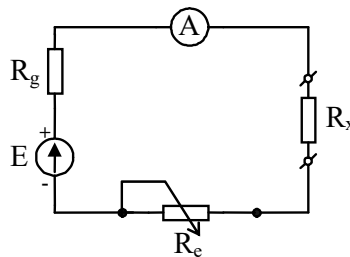


Figura 4.24 Schema ohmetrului serie.

La ohmetrele serie, verificarea etalonării se face prin "*aducerea la zero*" adică se scurtcircuitează bornele de intrare A-B și se reglează R_a până când acul aparatului indică valoarea zero ce corespunde curentului la cap de scară, adică

$$I_{sc} = I_{CS} = \frac{E}{R_g + R_A + R_a} = \frac{E}{R_s} \quad (4.63)$$

unde s-a notat rezistența totală înseriată cu R_x prin

$$R_s \triangleq R_g + R_A + R_a \quad (4.64)$$

După conectarea rezistenței necunoscute R_x , curentul indicat de mA este

$$I = \frac{E}{R_x + (R_g + R_A + R_a)} = \frac{E}{R_x + R_s} = I_{CS} \frac{R_s}{R_x + R_s} \quad (4.65)$$

de unde rezultă că

$$R_x = R_s \left(\frac{I_{CS}}{I} - 1 \right) \quad (4.66)$$

Deci, dependența rezistenței R_x de curentul I este neliniară, ceea ce se observă ușor și din etalonarea scării corespunzătoare acestui ohmetru dată în figura 4.25.

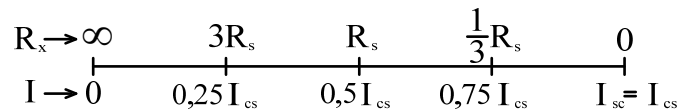


Figura 4.25 Etalonarea scării la ohmetru serie.

Rezultă că o rezistență $R_x \ll R_s$ sau $R_x \gg R_s$ nu poate fi citită cu precizie pe o astfel de scară. De aceea, pentru a măsura rezistențe de ordine diferite se folosesc mai multe scări caracterizate de valori centrale $R_s = \frac{E}{I_{CS}}$ diferite, obținute prin modificarea sensibilității mA cu ajutorul unor șunturi (Figura 4.26).

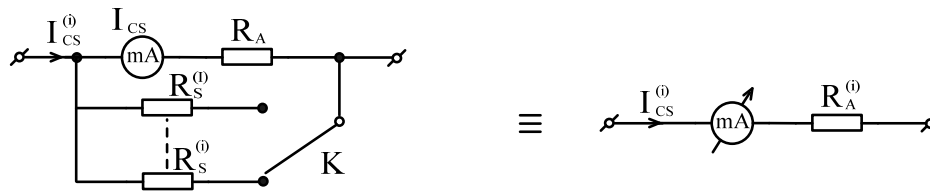


Figura 4.26 Modificarea scărilor ohmetrului cu ajutorul șunturilor.

Instrumentele echivalente corespunzătoare acestor șunturi se caracterizează prin:

$$I_{CS}^{(i)} = I_{CS} \frac{R_s^{(i)} + R_A}{R_s^{(i)}} > I_{CS}, \quad R_A^{(i)} = \frac{R_A R_s^{(i)}}{R_A + R_s^{(i)}} \quad (4.67)$$

Deoarece valorile centrale $R_s^{(i)} = E/I_{CS}^{(i)}$ se modifică doar printr-un coeficient multiplicativ, nu mai este necesară o nouă etalonare la trecerea de pe o scară pe alta.

b) - Ohmetre paralel

Pentru aceste ohmetre a căror schemă de principiu este prezentată în figura 4.27, operația inițială de verificare a etalonării se face prin „aducerea

la ∞ ”, adică se lasă bornele A-B în gol și se reglează R_a pentru indicație ∞ . Tensiunea la bornele voltmetrului în acest caz va fi

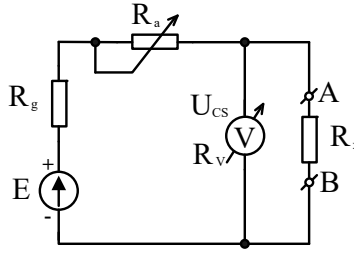


Figura 4.27 Schema ohmetrului paralel

$$U_{\text{gol}} = U_{CS} = \frac{R_V E}{R_g + R_a + R_V} = \frac{R_V}{R_t} E \quad (4.68)$$

unde

$$R_t \triangleq R_g + R_a + R_V \quad (4.69)$$

Cu rezistența R_x conectată, se obține

$$U = \frac{R_V \parallel R_x}{R_g + R_a + R_V \parallel R_x} E \quad (4.70)$$

astfel că

$$\begin{aligned} \frac{U_{CS}}{U} &= \frac{R_V}{R_t} \left(\frac{R_g + R_a}{R_V \parallel R_x} + 1 \right) = \frac{R_V (R_g + R_a)}{R_t} \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_x} \right) + \frac{R_V}{R_t} = \\ &= 1 + \frac{R_V (R_g + R_a)}{R_g + R_a + R_V} \cdot \frac{1}{R_x} = 1 + R_p \frac{1}{R_x} \end{aligned} \quad (4.71)$$

unde s-a notat cu

$$R_p \triangleq R_V \parallel (R_g + R_a) \quad (4.72)$$

rezistența totală ce este conectată în paralel cu R_x

Din relația (4.71) rezultă că

$$R_x = R_p \frac{1}{\left(\frac{U_{CS}}{U} - 1 \right)} = R_p \frac{1}{\left(\frac{I_{CS}}{I} - 1 \right)} \quad (4.73)$$

ceea ce arată că și pentru acest ohmetru dependența $R_x(U)$ sau $R_x(I)$ conduce la o scară neliniară, reprezentarea sa fiind dată în figura 4.28.

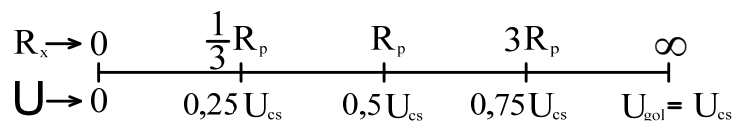


Figura 4.28 Etalonarea scării la ohmetrul paralel.

Această variantă de ohmetru este mai puțin utilizată în practică decât cea serie, fiind convenabilă în special pentru măsurarea rezistențelor mici.

Observație

La ambele tipuri de ohmetre (serie și paralel), dacă valoarea sursei E variază, indicația devine imprecisă. De aceea, ohmetrele de precizie trebuie să conțină o sursă de tensiune reglabilă.

4.2.3 Măsurarea rezistențelor prin metode de punte

4.2.3.1 Puntea Wheatstone

Schema de principiu a unei punți Wheatstone este prezentată în figura 4.29.

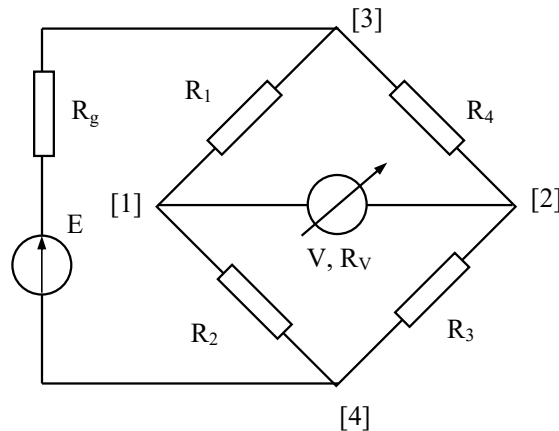


Figura 4.29

Puntea Wheatstone se compune din patru brațe rezistive, o diagonală de alimentare în care se conectează sursa de tensiune E și o diagonală de detecție în care se conectează aparatul de măsură (voltmetru indicator de nul).

Vom spune că puntea este la echilibru când este îndeplinită condiția

$$U_d = U_{12} = 0 \quad (4.74)$$

unde U_d se mai numește și tensiunea de dezechilibru și este tensiunea măsurată de indicatorul de nul.

Din condiția de echilibru rezultă că tensiunile U_{14} și U_{24} sunt egale. Se obține

$$U_{14} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{34} = U_{24} = \frac{R_3}{R_4 + R_3} U_{34} \quad (4.75)$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_4 + R_3} \quad (4.76)$$

Condiția de echilibru conduce la următoarele relații între rezistențe

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (4.77)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (4.78)$$

Observații:

- Condiția de echilibru nu depinde de valoarea tensiunii de alimentare E , de R_g și R_V .
- Prin inversarea pozițiilor generatorului și indicatorului de nul, condiția de echilibru nu se schimbă.
- Dacă $R_4 = R_x$ este o rezistență necunoscută, $R_3 = R_e$ este o rezistență variabilă etalonată, iar raportul $\frac{R_1}{R_2} = 10^{\pm n}$ este reglabil în decade, din condiția de echilibru se obține

$$R_x = 10^{\pm n} R_e \quad (4.79)$$

adică R_e poate fi etalonată direct în valori ale lui R_x .

- **Sensibilitatea punții**

Condiția de echilibru poate fi satisfăcută pentru o infinitate de valori ale rezistențelor. Se pune problema alegerii acelor valori încât puntea să fie cât mai sensibilă, adică să pună în evidență variații cât mai mici ale rezistențelor față de valoarea de la echilibru. Se definește *sensibilitatea punții*,

$$S = \frac{\Delta U_d / E}{\Delta R_4 / R_4} \quad (4.80)$$

adică raportul dintre variația tensiunii de dezechilibru normată la tensiunea aplicată, și variația relativă a rezistenței care a determinat dezechilibrul.

Pentru simplitatea calculului, determinarea sensibilității se va face în condițiile:

$$R_g = 0 \quad R_d \rightarrow \infty \quad (4.81)$$

care sunt foarte apropiate de cele reale pentru o sursă bună și un V cu R_i foarte mare utilizat ca detector.

În aceste ipoteze rezultă $I_d = 0$ și

$$U_d = U_{32} - U_{42} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E - \frac{R_3}{R_3 + R_4} E = E \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \quad (4.82)$$

$$\Delta U_d = E \frac{R_3}{(R_3 + R_4)^2} \Delta R_4 = E \frac{\frac{R_3}{R_4}}{\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)^2} \cdot \frac{\Delta R_4}{R_4} \quad (4.83)$$

Notând raportul $\frac{R_3}{R_4} \triangleq A$ rezultă

$$S = \frac{A}{(1+A)^2} \quad (4.84)$$

Funcția $S = f(A)$ este maximă pentru

$$\frac{dS}{dA} = \frac{1}{(1+A)^2} - \frac{2A}{(1+A)^3} = \frac{1-A}{(1+A)^3} = 0 \quad (4.85)$$

adică rezultă un maxim pentru $A=1$ și $S_{\max} = \frac{1}{4}$

Variația sensibilității S cu A este reprezentată în figura 4.30.

Sensibilitatea interesează în jurul poziției de echilibru, adică pentru

$$R_4 = \underbrace{R_{40}} + \Delta R_4 \quad \text{cu} \quad \Delta R_4 \ll R_{40} \quad (4.86)$$

valoarea de la echilibru

și

$$U_d = 0 + \Delta U_d = \Delta U_d \text{ (variază în jurul lui zero)} \quad (4.87)$$

astfel că

$$S_0 = \frac{\frac{U_d}{E}}{\frac{\Delta R_4}{R_{40}}} = \frac{A}{(1+A)^2} \quad (4.88)$$

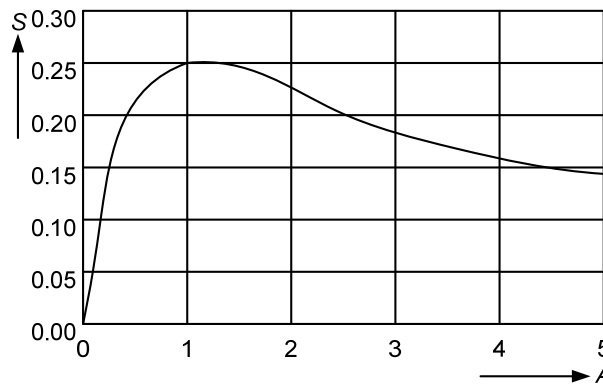


Figura 4.30

Observații

- În definiția sensibilității, ΔU_d este normat la E și nu la U_d cum ar trebui, deoarece la echilibru $U_d = 0$.
- Expresia sensibilității nu se modifică dacă se înlocuiește $A \rightarrow 1/A$ adică este indiferent cum se raportează rezistențele alăturate detectorului pentru obținerea lui A (fie R_3/R_4 fie R_4/R_3).

- Condiția de sensibilitate maximă ($A = 1$) cere ca rezistențele din brațele alăturat detectorului să fie egale două câte două. Această condiție are mai mult o importanță teoretică deoarece în practică este necesară realizarea unor scări decadice.
- Tensiunea de dezechilibru $U_d = ES_0 \frac{\Delta R_4}{R_{40}}$ este cu atât mai mare pentru un raport $\frac{\Delta R_4}{R_{40}} = \delta$ (numit și factor de dereglaj) cu cât:
 - E este mai mare, dar limitat la valoarea la care rezistențele se încălzesc modificându-și valoarea;
 - S_0 este mai mare, dar limitat la $1/4$ după cum s-a demonstrat.
- Orice indicator de nul are un prag de sensibilitate U_{\min} sub care tensiunea de dezechilibru nu mai poate fi pusă în evidență (Figura 4.31).

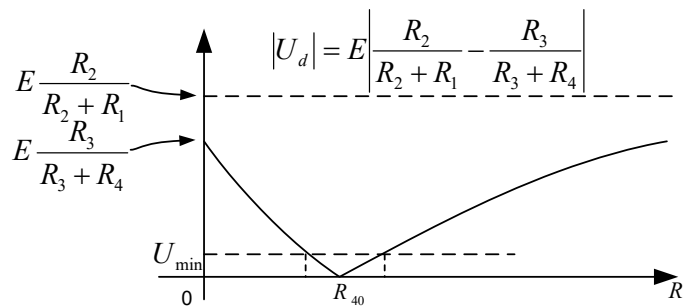


Figura 4.31

Pentru $|U_d| < U_{\min}$ rezultă o eroare de măsură numită eroare de prag de sensibilitate ε_{ps} .

Înlocuind pe U_d în inegalitatea de mai sus se obține

$$S_0 E \frac{|\Delta R_4|}{R_{40}} < U_{\min} \text{ sau } \frac{|\Delta R_4|}{R_{40}} < \frac{U_{\min}}{S_0 E} \quad (4.89)$$

de unde se deduce în situația cea mai defavorabilă că

$$\varepsilon_{ps} = \frac{U_{\min}}{S_0 E} \quad (4.90)$$

adică ε_{ps} scade când S_0 și E cresc.

- Dacă se ține seama de R_g și R_d , calculul conduce la o expresie mai complicată pentru S , iar aceste rezistențe reduc sensibilitatea punții (vezi bibliografia).

Puntea Wheatstone are numeroase aplicații în practică atât pentru a măsura rezistențe între $1\Omega \div 1M\Omega$ dar și mărimi neelectrice.

APLICAȚIE: O punte Wheatstone utilizează ca instrument indicator un voltmetru cu $U_{CS} = 0,5 \text{ V}$, având scara gradată în 50 diviziuni, deviația minimă sesizabilă de 0,2 diviziuni și $R_V \rightarrow \infty$. Sursa de alimentare are $E=1,5 \text{ V}$ și $R_g=0$. Se cunosc $R_1=1\text{k}\Omega$, $R_2=2\text{k}\Omega$. Se cer:

- Să se determine eroarea relativă limită procentuală datorată pragului de sensibilitate al indicatorului de nul.
- Să se determine eroarea relativă procentuală totală, știind că toate rezistențele au o toleranță de 0,5 %.

REZOLVARE:

Tensiunea minimă sesizabilă de voltmetru este

$$U_{d\min} = \pm U_{CS} \cdot 0,2/50 = \pm 2\text{mV} \quad (4.91)$$

În jurul echilibrului punții este valabilă formula

$$\frac{U_d}{E} = S \cdot \sigma \quad \text{unde} \quad S = \frac{A}{(1+A)^2}, \quad \sigma = \frac{\Delta R_3}{R_3} \quad (4.92)$$

Pentru puntea dată se obține raportul brațelor fixe din punte

$$A = \frac{R_2}{R_1} = 2 \quad (4.93)$$

și corespunzător o valoare pentru sensibilitatea relativă a punții $S = \frac{2}{9}$

La echilibrul punții este valabilă relația

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4 \quad (4.94)$$

Din care, se obține prin diferențiere:

$$R_1 \cdot \Delta R_3 = R_2 \cdot \Delta R_4 \Rightarrow \sigma = \frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{\Delta R_4}{R_4} \quad (4.95)$$

- Ținând cont de ultima relație, se poate obține eroarea relativă datorată sensibilității instrumentului indicator de nul:

$$\varepsilon_{R_x,1} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = \frac{U_{d\min}}{E \cdot S} = \pm 0,6\% \quad (4.96)$$

- Al doilea tip de eroare se datorează preciziei rezistențelor din compunerea punții, care se propagă în rezultatul final, ca eroare limită la măsurătorile indirecte:

$$\varepsilon_{R_x,2} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial R_4}{\partial R_i} \cdot \frac{R_i}{R_4} \cdot \varepsilon_{R_i} \right| = \sum_{i=1}^3 |\varepsilon_{R_i}| = 1,5 \cdot 10^{-2} = 1,5\% \quad (4.97)$$

Se obține în final eroarea relativă totală

$$\varepsilon_{R_x,\text{totală}} = \varepsilon_{R_x,1} + \varepsilon_{R_x,2} = \pm 2,1\% \quad (4.98)$$

4.2.3.2 Punți pentru măsurarea rezistențelor foarte mici

După cum s-a arătat în paragraful 4.1.4, pentru măsurarea rezistențelor foarte mici este necesară conexiunea cuadripolară. Puntea ce permite utilizarea acestei conexiuni este puntea dublă Thomson.

Rezistența de măsurat R_x în conexiune cuadripolară este introdusă într-o punte Wheatstone și comparată cu rezistența R_e având aceeași mărime (pentru ca puntea să aibă sensibilitatea cât mai bună) și conectată similar (figura 4.32).

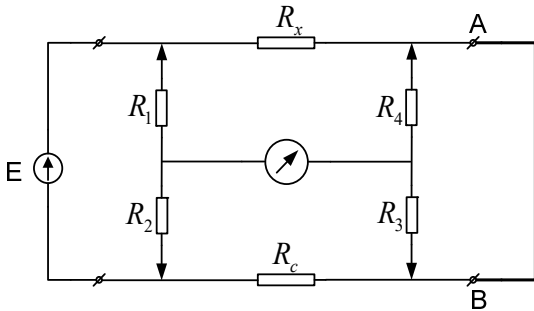


Figura 4.32

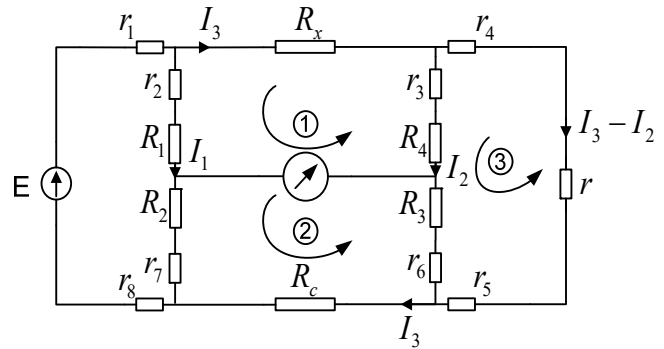


Figura 4.33

Schema echivalentă din figura 4.33 în care s-au reprezentat rezistențele de contact r_i și rezistența r a firului AB, are forma punții duble Thomson.

Pentru a deduce condiția de echilibru a punții duble, se vor scrie ecuațiile Kirchhoff pentru cele trei ochiuri în ipoteza că puntea este la echilibru ($I_d = 0$, $U_d = 0$) și neglijând rezistențele r_i foarte mici în raport cu R_k de valori normale ($r_i \ll R_k$) se obține,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & R_1 I_1 - R_4 I_2 - R_x I_3 = 0 \\ \textcircled{2} \quad & R_2 I_1 - R_3 I_2 - R_c I_3 = 0 \\ \textcircled{3} \quad & (R_3 + R_4) I_2 - r_t I_3 = 0, \quad r_t = r + r_4 + r_5 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ca acest sistem omogen să aibă soluție $\neq 0$, este necesar ca

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & -R_4 & -R_x \\ R_2 & -R_3 & -R_c \\ 0 & R_3 + R_4 & -r_t \end{vmatrix} = 0 \quad (4.100)$$

de unde se obține dezvoltând după ultima coloană, condiția de echilibru

$$R_x R_2 (R_3 + R_4) - R_c R_1 (R_3 + R_4) + r_t (R_2 R_4 - R_1 R_3) = 0 \quad (4.101)$$

sau

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_c - r_t \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_2 (R_3 + R_4)} = \frac{R_1}{R_2} R_c - \underbrace{\rho}_{\text{termen de corectie}} \quad (4.102)$$

Ca rezultatul măsurării să nu depindă de ρ și pentru ușurința echilibrării punții, se alege

$$\rho = 0 \Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4 \text{ sau } r = 0 \quad (4.103)$$

Prima condiție poate fi realizată prin construcție luând rezistențele R_1 și R_4 identice și reglabile prin cursor comun, iar R_2 și R_3 identice și reglabile în decade (vezi Figura 4.34).

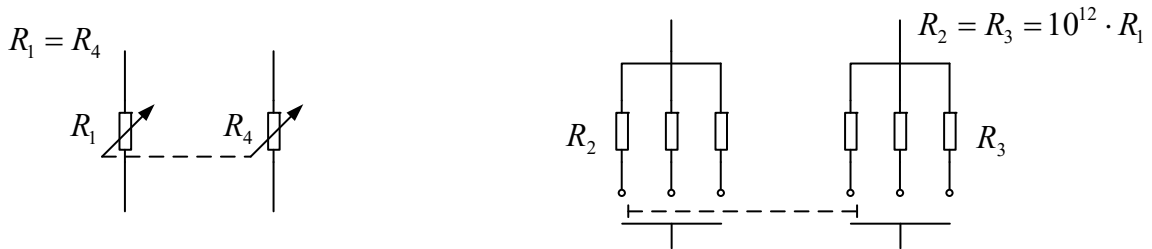


Figura 4.34

A doua condiție se obține utilizând un conductor cu secțiune mare și lungime mică care determină o rezistență f mică.

Pentru $p = 0$, condiția de echilibru este

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_c \quad (4.104)$$

Cu puntea Thomson se pot măsura rezistențe cu valori între $10^{-6} \Omega \div 1 \Omega$ cu erori sub 0,1%.

4.2.3.3 Punți pentru măsurarea rezistențelor foarte mari

S-a arătat în paragraful 4.1.4 că pentru măsurarea rezistențelor foarte mari este necesar conexiunea tripolară.

Dar analizând condiția de echilibru a punții Wheatstone,

$$R_x = R_c \frac{R_1}{R_2} \quad (4.105)$$

pentru R_x foarte mare rezultă:

- fie necesitatea unei R_c foarte mare care este practic imposibil de realizat cu precizie acceptabilă;
- fie necesitatea ca $A = \frac{R_1}{R_2} \gg 1$, care conduce la o sensibilitate foarte

scăzută.

Eliminarea acestor dificultăți se face utilizând schema din figura 4.35 unde se obține o rezistență R_3 echivalentă de valoare mare utilizând rezistoare de valori normale.

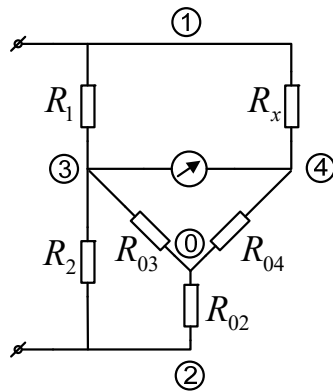


Figura 4.35

Transformând $Y \rightarrow \Delta$ rezultă:

$$R_{23} = R_{03} + R_{02} + \frac{R_{02} \cdot R_{03}}{R_{04}} \text{ care apare în paralel cu } R_2 \Rightarrow R'_2 = R_2 \parallel R_{23}$$

$R_{34} = R_{03} + R_{04} + \frac{R_{03} \cdot R_{04}}{R_{02}}$ care apare în paralel pe detector și nu influențează echilibrul,

$$R_{42} = R_{04} + R_{02} + \frac{R_{04} \cdot R_{02}}{R_{03}} = R_{04} + R_{02} \left(1 + \frac{R_{02}}{R_{03}} \right) = R_3 \text{ care va fi foarte mare}$$

pentru $\frac{R_{02}}{R_{03}} \gg 1$.

În acest caz, condiția de echilibru devine,

$$R_x = R_{42} \frac{R_1}{R'_2} \tag{4.106}$$

De asemenea, pentru a nu limita sensibilitatea punții în cazul rezistențelor R_x foarte mari, o altă necesitate este ca detectorul de zero să aibă R_d foarte mare.

Puntea care permite măsurarea rezistențelor în conexiune tripolară este puntea Wagner (Figura 4.36).

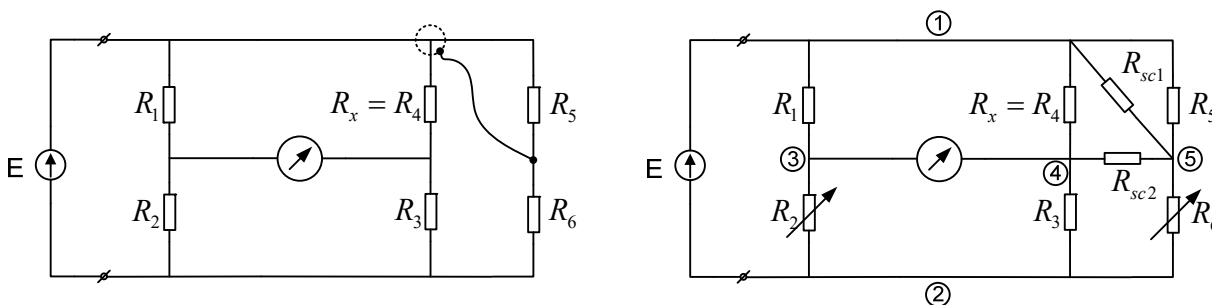


Figura 4.36

Prin gardarea uneia din bornele la care se leagă R_x foarte mare, rezistența de scăpări dintre borne acestei rezistențe este divizată în R_{sc1} și R_{sc2} . Pentru ca aceste rezistențe să nu afecteze măsurarea lui R_x echilibru se face în două etape:

- cu detectorul de nul între punctele 4-5 se echilibrează puntea $R_x, R_3, R_6, R_5 \parallel R_{sc1}$ și se obține: $U_{45} = 0, I_{45} = 0$;
- cu detectorul de nul între punctele 3-4 se echilibrează puntea propriu-zisă variind R_1 sau R_2 (nu R_3 pentru că se strică echilibru de la etapa 1). Rezistențele parazite nu afectează măsurarea deoarece R_{sc1} nu aparține acestei punți, iar R_{sc2} nu contează ($U_{45} = 0$).

4.3 Măsurarea impedanțelor

4.3.1 Măsurarea impedanțelor prin metode de zero (metode de punte)

Metodele de zero în curent alternativ sunt mult utilizate în tehnica măsurărilor electrice și electronice deoarece au sensibilități ridicate și posibilități multiple (se utilizează nu numai la măsurarea impedanței, dar și a frecvenței, puterilor etc, și se pretează ușor la operația de automatizare).

4.3.1.1 Punți de curent alternativ

Schema este reprezentată în figura 4.37.

Structura este asemănătoare cu punții de curent continuu, dar generatorul și detectorul trebuie să fie de tensiuni alternative.

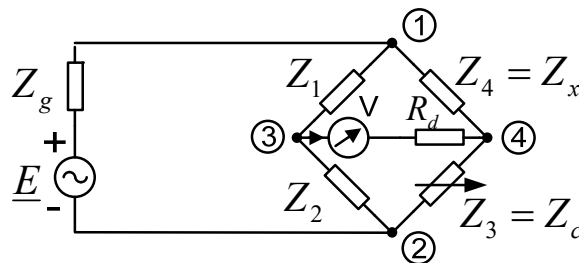


Figura 4.37

- **Condiția de echilibru**

Procedând în mod asemănător ca la puntea de curent continuu, se obține fără dificultate condiția de echilibru a acestei punți, care este

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (4.107)$$

și observațiile prezentate la puntea Wheatstone rămân valabile.

Dar această condiție este o relație complexă care conduce la două relații reale.

Dacă

$$Z_i = R_i + jX_i = |Z_i|e^{j\varphi_{Z_i}}, \quad i = \overline{1, 4} \quad (4.108)$$

se obține din egalarea părților reale și a celor imaginare alte forme ale condiției de echilibru echivalente și anume:

$$\begin{cases} R_1R_3 - X_1X_3 = R_2R_4 - X_2X_4 \\ R_1R_3 + X_1X_3 = R_2X_4 + X_2R_4 \end{cases} \quad (4.109)$$

sau

$$\begin{cases} |Z_1||Z_3| = |Z_2||Z_4| \\ \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4 \end{cases} \quad (4.110)$$

Aceste forme arată că pentru a obține echilibrul trebuie satisfăcute două relații reale, și ca urmare vor fi necesare *două elemente de reglaj*. Dar alegerea acestor elemente *nu* poate fi făcută oricum.

Pentru ușurință în efectuarea operației de măsurare, la alegerea structurii unei punți este indicat să se țină seama de următoarele precizări:

- Nu este necesar ca toate brațele punții să fie complexe. Două trebuie să fie complexe, brațul *ce conține impedanța de măsurat* și un altul numit *de referință*. Celelalte două numite *brațe auxiliare* pot conține fie numai rezistențe, fie numai reactanțe, fie unul conține o rezistență și celălalt o reactanță.
 - Structura brațelor punții trebuie astfel aleasă încât relațiile de echilibru să nu depindă de frecvență, evitându-se în acest mod erorile ce s-ar datora acestei mărimi.
 - Este util ca cele două mărimi ale impedanței necunoscute determinate din condițiile de echilibru să depindă fiecare doar de câte un element reglabil, deoarece în acest caz fiecare din aceste elemente reglabile se poate etalona în valori ale unuia din elementele necunoscute.
 - Nu trebuie folosite bobine variabile deoarece erorile sunt mari din cauza elementelor parazite importante și a preciziei de reglaj reduse.
- **Clasificarea punților de curent alternativ**
Clasificarea punților se poate face după mai multe criterii.

A. După poziția brațelor auxiliare se disting:

1) Punți cu *brațe auxiliare alăturate* numite **punți de raport**

Condiția de echilibru este

$$Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3 \quad (4.111)$$

Dacă $Z_4 = Z_x$, $Z_3 = Z_r$ atunci brațele auxiliare sunt Z_1 și Z_2 al căror raport *poate fi* real sau imaginar (nu este obligatoriu, bineînțeles).

Cazuri:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad Z_1 = R_1 \quad Z_2 = R_2 \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} \in \mathbb{R} \\
 \textcircled{2} \quad Z_1 = jX_1 \quad Z_2 = jX_2 \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1}{X_2} \in \mathbb{R} \\
 \textcircled{3} \quad Z_1 = R_1 \quad Z_2 = jX_2 \quad \frac{Z_1}{Z_2} = -j \frac{R_1}{X_2} \in \mathbf{I} \\
 \textcircled{4} \quad Z_1 = jX_1 \quad Z_2 = R_2 \quad \frac{Z_1}{Z_2} = j \frac{X_1}{R_2} \in \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

Din condiția de echilibru se obține pentru fiecare caz:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad Z_x = \frac{R_1}{R_2} Z_r \Rightarrow \frac{X_x}{X_r} = \frac{R_1}{R_2} > 0 \quad (X_x, X_2 \text{ de aceeași natură}) \\
 \textcircled{2} \quad Z_x = \frac{X_1}{X_2} Z_r \Rightarrow \begin{cases} \frac{X_1}{X_2} = \frac{R_x}{R_r} > 0 & (X_1, X_2 \text{ de aceeași natură}) \\ \frac{X_x}{X_r} = \frac{X_1}{X_2} > 0 & (X_x, X_r \text{ de aceeași natură}) \end{cases} \\
 \textcircled{3} \quad Z_x = \frac{R_1}{jX_2} Z_r \Rightarrow \begin{cases} \frac{X_r}{X_2} = \frac{R_x}{R_1} > 0 & (X_r, X_2 \text{ de aceeași natură}) \\ -X_x X_2 = R_1 R_r > 0 & (X_x, X_2 \text{ de natură diferită}) \end{cases} \tag{4.113} \\
 \textcircled{4} \quad Z_x = \frac{jX_1}{R_2} Z_r \Rightarrow \begin{cases} -X_1 X_r = R_x R_2 > 0 & (X_r, X_1 \text{ de natură diferită}) \\ \frac{X_x}{X_1} = \frac{R_r}{R_2} > 0 & (X_x, X_1 \text{ de aceeași natură}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Concluzii

Punțile de raport real măsoară impedanțe Z_x de aceeași natură cu Z_r , iar când brațele auxiliare sunt pur imaginare, și reactanțele acestor brațe trebuie să fie de aceeași natură între ele.

Punțile de raport imaginar măsoară impedanțe Z_x de natură diferită de Z_r , iar reactanță auxiliară trebuie să fie de aceeași natură cu Z_r dacă ele sunt în brațe vecine sau de natură diferită dacă sunt în brațe opuse.

2) Punți cu brațe auxiliare opuse numite **punți de produs**

Condiția de echilibru este,

$$Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2} Z_3 = Z_1 Z_3 \frac{1}{Z_2} \tag{4.114}$$

Dacă $Z_4 = Z_x$, $Z_2 = Z_r$ atunci brațele auxiliare sunt Z_1 și Z_3 și produsul lor poate fi real sau imaginar.

Cazuri:			
①	$Z_1 = R_1$	$Z_3 = R_3$	$\Rightarrow Z_1 Z_3 = R_1 R_3 \in \mathbb{R}$
②	$Z_1 = jX_1$	$Z_3 = jX_3$	$\Rightarrow Z_1 Z_3 = -X_1 X_3 \in \mathbb{R}$
③	$Z_1 = R_1$	$Z_3 = jX_3$	$\Rightarrow Z_1 Z_3 = jR_1 X_3 \in \mathbf{I}$
④	$Z_1 = jX_1$	$Z_3 = R_3$	$\Rightarrow Z_1 Z_3 = jX_1 R_3 \in \mathbf{I}$

}

punți de produs real

punți de produs imaginar

Din condiția de echilibru se obține pentru fiecare caz:

①	$Z_x = R_1 R_3 Y_r \Rightarrow$	$\frac{X_x}{B_r} = R_1 R_3 > 0 \quad (X_x, X_r \text{ de natură diferită})$
②	$Z_x = -X_1 X_3 Y_r \Rightarrow$	$\begin{cases} -X_1 X_3 = \frac{R_x}{G_r} > 0 & (X_1, X_3 \text{ de natură diferită}) \\ \frac{X_x}{B_r} = -X_1 X_3 > 0 & (X_x, X_r \text{ de natură diferită}) \end{cases}$
③	$Z_x = jR_1 X_3 Y_r \Rightarrow$	$\begin{cases} -X_3 B_r = \frac{R_x}{R_1} > 0 & (X_r, X_3 \text{ de aceeași natură}) \\ \frac{X_x}{X_3} = R_1 G_r > 0 & (X_x, X_3 \text{ de aceeași natură}) \end{cases}$
④	$Z_x = jX_1 R_3 Y_r \Rightarrow$	$\begin{cases} -X_1 B_r = \frac{R_x}{R_3} > 0 & (X_r, X_1 \text{ de aceeași natură}) \\ \frac{X_x}{X_1} = R_3 G_r > 0 & (X_x, X_1 \text{ de aceeași natură}) \end{cases}$

Concluzii

Punțile de produs real măsoară impedanțe Z_x de natură diferită de Z_r , iar când brațele auxiliare sunt pur imaginare, și reactanțele acestor brațe trebuie să fie de natură diferită între ele.

Punțile de produs imaginar măsoară impedanțe Z_x de aceeași natură cu Z_r și cu reactanța auxiliară.

B. După modul de reprezentare al impedanței măsurate există:

1) *Punți serie* la care impedanța Z_x se conectează sub forma unui *reactor disipativ serie* (figura 4.38) și se măsoară

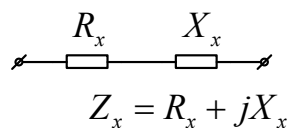


Figura 4.38

Pentru a obține relații de calcul mai simple pentru R_x , X_x :

- dacă puntea este de raport (se ia cazul rezistiv),

$$Z_x = R_x + jX_x = \frac{R_1}{R_2} Z_r, \quad (4.115)$$

este necesar ca impedanța de referință să fie de forma $Z_r = R_r + jX_r$, adică de structura serie;

- dacă puntea este de produs (de exemplu, produs rezistiv),

$$Z_x = R_x + jX_x = R_1 R_3 Y_r, \quad (4.116)$$

este necesar ca impedanța de referință să se aleagă de forma $Z_r = \frac{1}{Y_r} = \frac{1}{G_r + jB_r}$, adică de structura derivație.

Deci, puntea serie se poate obține dintr-o punte de raport cu Z_r serie sau din una de produs cu Z_r derivație.

2) *Punți derivație* la care Z_x se conectează sub forma unui *reactor disipativ derivație* (figura 4.39) și se măsoară G_x și B_x :

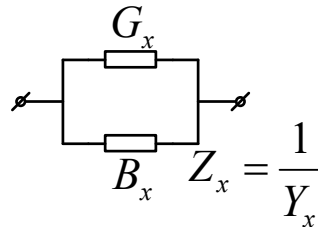


Figura 4.39

Repetând raționamentul de la puntea serie, rezulta ca puntea derivație se poate obține:

- fie dintr-o punte de raport la care elementul de referință este și el de structura derivație,

$$Z_r = \frac{1}{Y_r} = \frac{1}{G_r + jB_r}, \quad (4.117)$$

și

$$Y_x = \frac{R_2}{R_1} Y_r \quad \text{sau} \quad G_x + jB_x = \frac{R_2}{R_1} (G_r + jB_r) \quad (4.118)$$

- fie dintr-o punte de produs la care elementul de referință este serie,

$$Z_r = R_r + jX_r \quad (4.119)$$

și

$$Z_x = R_1 R_3 Y_r \quad \text{sau} \quad G_x + jB_x = G_1 G_2 (R_r + jX_r) \quad (4.120)$$

C. După poziția elementelor reglabile, punțile sunt:

- 1) Punți cu *ambele elemente reglabile în brațele de referință*
Acestea pot fi etalonate în valori ale rezistenței și reactanței, sau conductanței și susceptanței, pentru a măsura direct mărimile impedanței necunoscute (braț referință = braț etalon).
- 2) Punți cu *elemente reglabile în brațe diferite*, dar nu în cel al impedanței Z_x

Unul din elemente poate fi etalonat direct în valori ale lui Q_x sau $D_x = \frac{1}{Q_x}$.

- 3) Punți cu elemente etalon în același braț cu Z_x

APLICAȚIE: Pentru o inductanță, măsurată cu o punte de curent alternativ, cu brațele auxiliare rezistive se obțin următoarele valori în funcție de configurația folosită pentru punte: $L_1=300\text{mH}$ și $L_2=303\text{mH}$.

Care este valoarea inductanței și a factorului ei de calitate? Se va avea în vedere structura punții în fiecare caz.

REZOLVARE:

Cele două valori se obțin în urma măsurării modelului serie respectiv paralel pentru inductanța L . Între elementele celor două modele există relația de legătură

$$L_p = L_s \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right). \quad (4.121)$$

Din această relație se poate determina factorul de calitate

$$Q = \sqrt{\frac{L_s}{L_p - L_s}} = 10 \quad (4.122)$$

În cazul în care bobina este măsurată cu o punte de produs, care determina modelul serie, valoarea inductanței este $L=300\text{mH}$; în cazul în care pentru bobină se determină modelul paralel valoarea bobinei este $L=303\text{mH}$.

4.3.1.2 Sensibilitatea punților de curent alternativ

Sensibilitatea punților de c.a. se definește asemănător ca la punțile de c.c.:

$$S = \frac{\Delta \underline{U}_d / \underline{E}}{\Delta Z_4 / Z_4} \quad (4.123)$$

cu deosebirea ca S va fi o mărime complexă de această dată.

Pentru cazul $Z_g = 0$, $Z_d \rightarrow \infty$, procedând identic ca la punțile de curent continuu se obține:

$$S_0 = \frac{A}{(1+A)^2} \text{ cu } A \triangleq \frac{Z_3}{Z_4} \text{ (deci și } A \text{ este mărime complexa)} \quad (4.124)$$

Senzitivitatea în jurul poziției de echilibru se analizează și ea la fel, adică pentru

$$\begin{aligned} Z_4 &= Z_{40} + \Delta Z_4 \text{ cu } |\Delta Z_4| = |Z_4| \\ Z_1 Z_3 &= Z_2 Z_{40} \end{aligned} \quad (4.125)$$

se obține

$$A \cong \frac{Z_3}{Z_{40}} = \frac{Z_2}{Z_1} \text{ și } S_0 = \frac{U_d/E}{\Delta Z_4/Z_{40}} = \frac{A}{(1+A)^2} \quad (4.126)$$

Deci expresiile obținute sunt aceleași cu cele de la punți de curent continuu numai că mărimile sunt cantități complexe.

Dacă

$$A = |A|e^{j\varphi_A} = \left| \frac{Z_2}{Z_1} \right| e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4.127)$$

rezultă

$$|A| = \left| \frac{Z_2}{Z_1} \right| \text{ și } \varphi_A = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (4.128)$$

Pentru sensibilitatea $S = |S|e^{j\varphi_S}$ interesează numai modulul deoarece indicatorul de nul : în general insensibil la fază și se obține,

$$|S| = \frac{|A|}{|(1+A)|^2} = \frac{|A|}{1 + 2|A|\cos\varphi_A + |A|^2} \quad (4.129)$$

Maximizarea sensibilității, mai întâi după $|A|$ va fi pentru

$$\frac{d|S|}{d|A|} = \frac{1 + 2|A|\cos\varphi_A + |A|^2 - 2|A|\cos\varphi_A - 2|A|^2}{(1 + 2|A|\cos\varphi_A + |A|^2)^2} = 0 \quad (4.130)$$

adică pentru $|A|=1$, rezultând $|S|_{\max} = \frac{1}{2(1 + \cos\varphi_A)}$.

Maximizarea după φ_A se obține pentru $\varphi_A \rightarrow \pm\pi$ când $|S| \rightarrow \infty$, adică pentru $\varphi_2 - \varphi_1 \rightarrow \pm\pi$, ceea ce înseamnă că impedanțele Z_1 și Z_2 trebuie să fie pur reactive și de natură diferită (Figura 4.40), condiție ce trebuie realizată și de Z_3 și Z_{40} deoarece

$$A = \frac{Z_3}{Z_{40}} = \frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow \varphi_3 - \varphi_{40} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (4.131)$$

Dar în practică nu există reactanțe pure, adică bobine și condensatoare ideale, și situația nu corespunde unor cazuri reale $|S| \rightarrow \infty$).

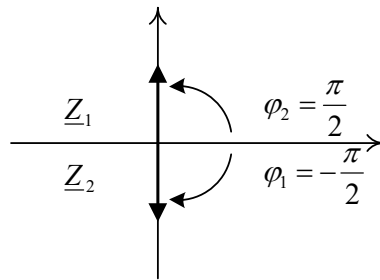


Figura 4.40

În situațiile cele mai întâlnite cum sunt:

- punțile de raport real rezistiv: $\varphi = 0 \Rightarrow |S|_{\max} = \frac{1}{4}$
- punțile de raport imaginar: $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow |S|_{\max} = \frac{1}{2}$

4.3.1.3 Punți pentru măsurarea condensatoarelor

Condensatoarele se măsoară practic numai în funcție de capacități și rezistente.

1) Puntea Sauty

Schema punții Sauty este reprezentată în figura 4.41

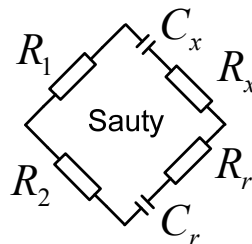


Figura 4.41

Este o punte de raport rezistiv serie.

Scriind condiția de echilibru

$$R_x + \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{R_1}{R_2} \left(R_r + \frac{1}{j\omega C_r} \right) \quad (4.132)$$

rezultă

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_r, \quad C_x = \frac{R_2}{R_1} C_r \quad (4.133)$$

Se observă că relațiile de echilibru sunt independente de frecvență, deci frecvența generatorului nu trebuie cunoscută cu precizie.

- Dacă se dorește măsurarea directă a mărimilor R_x și C_x , se pot alege ca elemente etalon reglabile, elementele impedenței de referință: $R_r = R_c$, $C_r = C_c$ (R_c etalonat în valori R_x și C_c în valori C_x),

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_e \text{ și } C_x = \frac{R_2}{R_1} C_e \quad (4.134)$$

iar raportul $\frac{R_1}{R_2}$ se poate lua variabil în trepte decadice,

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{\pm n}, \quad n \in N \quad (4.135)$$

- Dacă se dorește măsurarea directă a lui C_x și a factorului de pierderi D_x ,

$$C_x = \frac{R_2}{R_1} C_r \text{ și } D_x = \omega C_x R_x = \omega C_r R_r \quad (4.136)$$

atunci se pot lua ca elemente reglabile R_2 care se poate etalona în valori ale lui C_x , și $R_r = R_{3c}$ ce se poate etalona în valori ale lui D_x pentru o valoare a frecvenței data,

$$C_x = \frac{C_r}{R_1} R_{2e}, \quad D_x = \omega C_r R_{3e} \quad (4.137)$$

Deoarece $R_{3e \max}$ limitează pe D_x , rezulta ca *puntea Sauty* este utilizată pentru măsurarea capacităților cu pierderi mici.

2) *Puntea Nernst (puntea Sauty derivație)*

Schema acestei punți este cea din figura 4.42

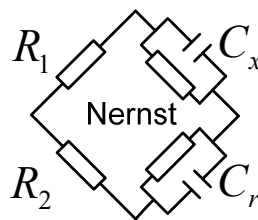


Figura 4.42

Este o punte de raport rezistiv de tip paralel.

Puntea Nernst este *duala* punții Sauty, fiind obținută prin transformarea brațelor serie în brațe paralel.

Condiția de echilibru,

$$G_x + jB_x = \frac{R_2}{R_1} (G_r + jB_r) \quad (4.138)$$

determina

$$G_x = \frac{R_2}{R_1} G_r \text{ și } C_x = \frac{R_2}{R_1} C_r \quad (4.139)$$

sau

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_r \text{ și } C_x = \frac{R_2}{R_1} C_r \quad (4.140)$$

relațiile fiind identice cu cele obținute la puntea Sauty.

Concluzie

Pentru două punți duale, relațiile de echilibru sunt identice.

Ca urmare, precizările în legătură cu alegerea elementelor reglabile făcute la puntea Sauty rămân valabile și la puntea Nernst, numai că:

$$D_x = \frac{1}{\omega C_x R_x} = \frac{1}{\omega C_r R_r} = \frac{1}{\omega C_r R_{3e}} \quad (4.141)$$

și $R_{3e \max}$ limitează inferior pe D_x , adică puntea Nernst se utilizează pentru măsurarea capacităților cu pierderi mari, sau a rezistențelor cu capacitatea mare în paralel.

3) Puntea Schering

Scheme ale acestei punți sunt reprezentate în figura 4.43.

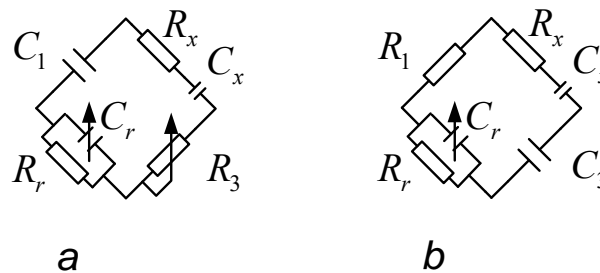


Figura 4.43

Este o punte de produs imaginar de tip serie.

Varianta a se utilizează pentru măsurarea condensatoarelor supuse la tensiuni mari, când este necesar pentru protecția operatorului ca elementele reglabile să aibă cursoarele la masa și să fie sub tensiuni mici.

Condiția de echilibru este:

$$Z_x = \frac{1}{j\omega C_1} R_3 (G_r + jB_r) \quad (4.142)$$

de unde rezultă

$$R_x = \frac{C_r}{C_1} R_3 \quad C_x = \frac{C_1 R_r}{R_3} \quad (4.143)$$

și

$$D_x = \omega C_x R_x = \omega \mathcal{C}_r R_r \quad (4.144)$$

deci R_3 se poate etalona în valori ale lui C_x , iar $C_r=C_2$ în valori ale lui D_x .

Rezistența R_x nu se poate măsura direct, ea depinzând de două elemente reglabile.

Varianta b este recomandată pentru măsurări la frecvențe mari unde elementele reglabile trebuie să fie condensatoarele deoarece se comporta mai bine decât rezistoarele sau bobinele, iar rotoarele să fie legate la masă ca atingerea lor să nu influențeze condițiile de echilibru.

Din

$$Z_x = \frac{1}{j\omega C_1} R_3 (G_r + jB_r) \quad (4.145)$$

rezultă

$$R_x = \frac{\mathcal{C}_r}{C_3} R_1, \quad C_x = \frac{R_r}{R_1} \mathcal{C}_3 \quad (4.146)$$

și

$$D_x = \omega C_x R_x = \omega \mathcal{C}_r R_r \quad (4.147)$$

Deci se va etalona \mathcal{C}_3 în valori ale lui C_x , iar \mathcal{C}_r în valori ale lui D_x .

4.3.1.4 Punți pentru măsurarea bobinelor

Și bobinele se măsoară practic numai în funcție de capacități și rezistențe (rareori se folosesc punți Sauty care necesită bobine etalon).

1) *Puntea Maxwell*

Puntea Maxwell are schema reprezentată în figura 4.44.

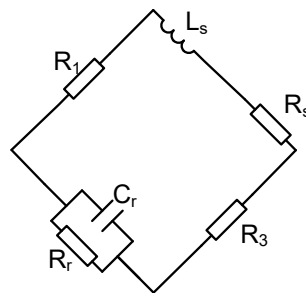


Figura 4.44

Este o punte de produs rezistiv de tip serie la care condiția de echilibru

$$R_x + j\omega L_x = R_1 R_3 (G_r + j\omega C_r) \quad (4.148)$$

determină

$$R_x = R_1 R_3 \frac{1}{R_r}, \quad L_x = R_1 R_3 C_r \quad (4.149)$$

și

$$Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega C_r R_r \quad (4.150)$$

Ca elemente reglabile se pot alege elementele brațului de referință.

Dacă se dorește indicarea directă a lui R_x și L_x atunci:

$$R_r = \mathcal{R}'_e \text{ gradată în valori ale lui } R_x;$$

$$C_r = \mathcal{C}'_e \text{ gradată în valori ale lui } L_x.$$

Dacă se dorește indicarea directă a lui L_x și Q_x la o frecvență precizată, atunci:

$$R_3 = \mathcal{R}'_{3e} \text{ gradat în valori ale lui } L_x$$

$$R_r = \mathcal{R}'_{2e} \text{ gradat în valori ale lui } Q_x \text{ pentru frecvență dată.}$$

Deoarece o rezistență R_r nereactivă de valoare mare se realizează dificil, rezultă că punte; Maxwell se poate utiliza pentru L_x cu Q_x mic.

2) Puntea Hay

Puntea Hay (figura 4.45) este duala punții Maxwell, având în consecință aceleași condiții de echilibru, dar măsurate direct sunt elementele reactorului disipativ derivație.

Se folosește pentru măsurarea bobinelor cu Q mare sau mediu.

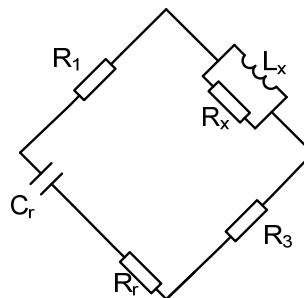


Figura 4.45

3) Puntea Owen

Schemele acestei punți sunt reprezentate în figura 4.46

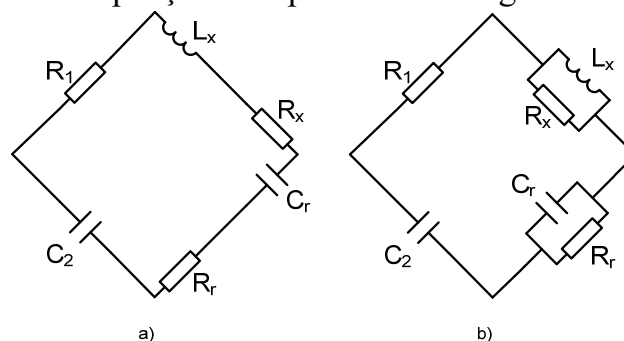


Figura 4.46

Este o punte de raport imaginar în ambele variante, serie și paralel, care sunt duale între ele.

Relațiile de echilibru pentru aceste punți se obțin scriind condiția pentru una din ele, de exemplu pentru varianta serie (Figura 4.46 a),

$$R_x + j\omega L_x = R_1 j\omega C_2 \left(R_r + \frac{1}{j\omega C_r} \right) \quad (4.151)$$

unde rezultă

$$R_x = \frac{C_2}{C_r} R_1, \quad L_x = C_2 R_1 R_r, \quad Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega C_r R_r \quad (4.152)$$

Dacă se alege:

\mathcal{C}_r și \mathcal{R}_r se măsoară direct R_x și L_x

\mathcal{C}_r și \mathcal{C}_2 se măsoară direct Q_x și L_x la frecvență fixată