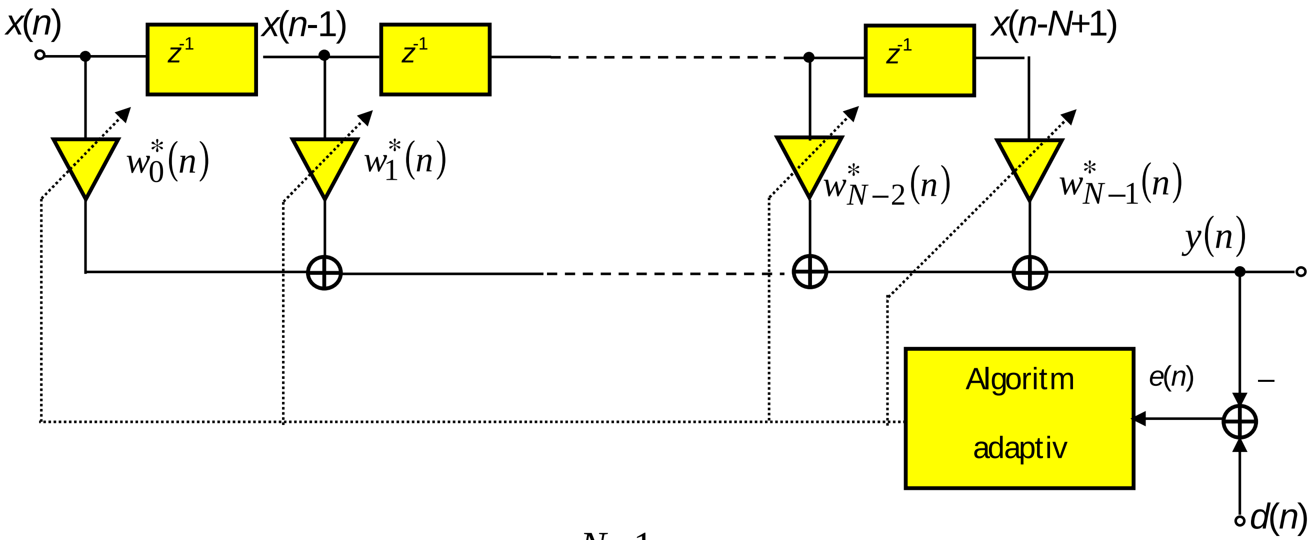
1 INTRODUCERE

1.1. Filtre adaptive – caracteristici generale

1.1. Filtre adaptive – caracteristici generale

- Filtru adaptiv=filtru cu parametri reglabili+algoritm adaptiv recursiv
- Util în medii necunoscute sau nestaționare

Exemplu – filtru adaptiv FIR



$$e(n)=d(n)-y(n)=d(n)-\sum_{k=0}^{N-1} w_k^*(n)x(n-k)=d(n)-\mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{w}(n)=[w_0(n), w_1(n),\ldots, w_{N-1}(n)]^T, \quad \mathbf{w}^H(n)=\left(\mathbf{w}^T(n)\right)^*$$

$$\mathbf{x}(n)=[x(n), x(n-1),\ldots, x(n-N+1)]^T$$

Funcții cost

- *- eroarea medie pătratică* ,

$$\mathrm{E}\left\{\left|e^{2}(n)\right|\right\};$$

- *- suma pătratelor erorilor* (norma L_2 evaluată pe un suport finit)

$$\sum_{k=N}^{M}\left|e(n-k)\right|^{2}$$

Funcții cost

- - *suma ponderată a pătratelor erorilor*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \left| e(n-k) \right|^2 \qquad \lambda \in (0,1]$$

- - *norma L_1 a erorii* evaluată pe un suport finit

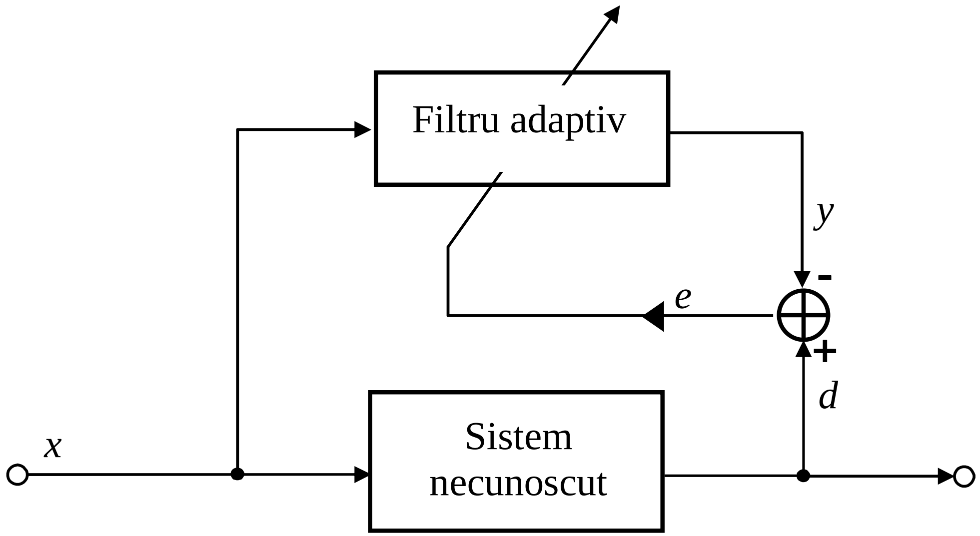
$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| e(n-k) \right|$$

Caracteristici generale

- *viteza de convergență*
- *dezadaptarea*
- *capacitatea de urmărire* a variațiilor statistice ale semnalelor
- *robustețea*
- *complexitatea algoritmului*
- *structura*
- *proprietăți numerice*

Configurații de sisteme adaptive

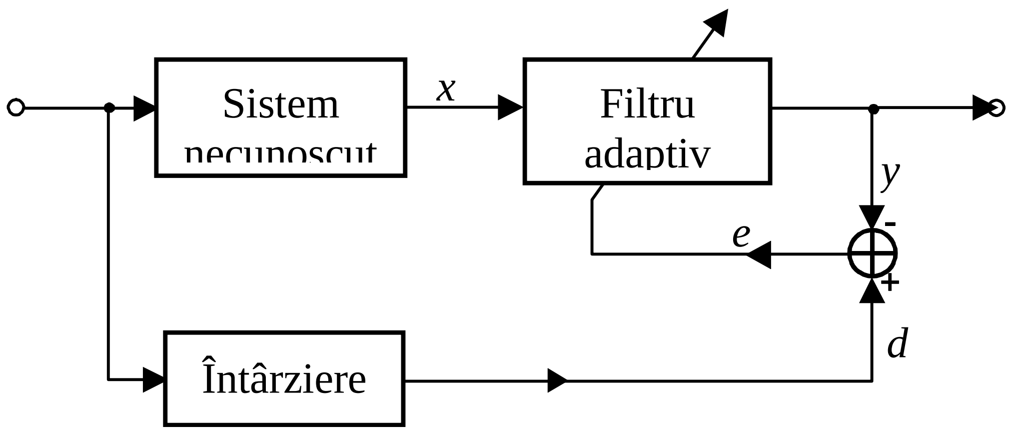
- **1.2.1 Identificarea sistemelor**



Aplicații tipice:

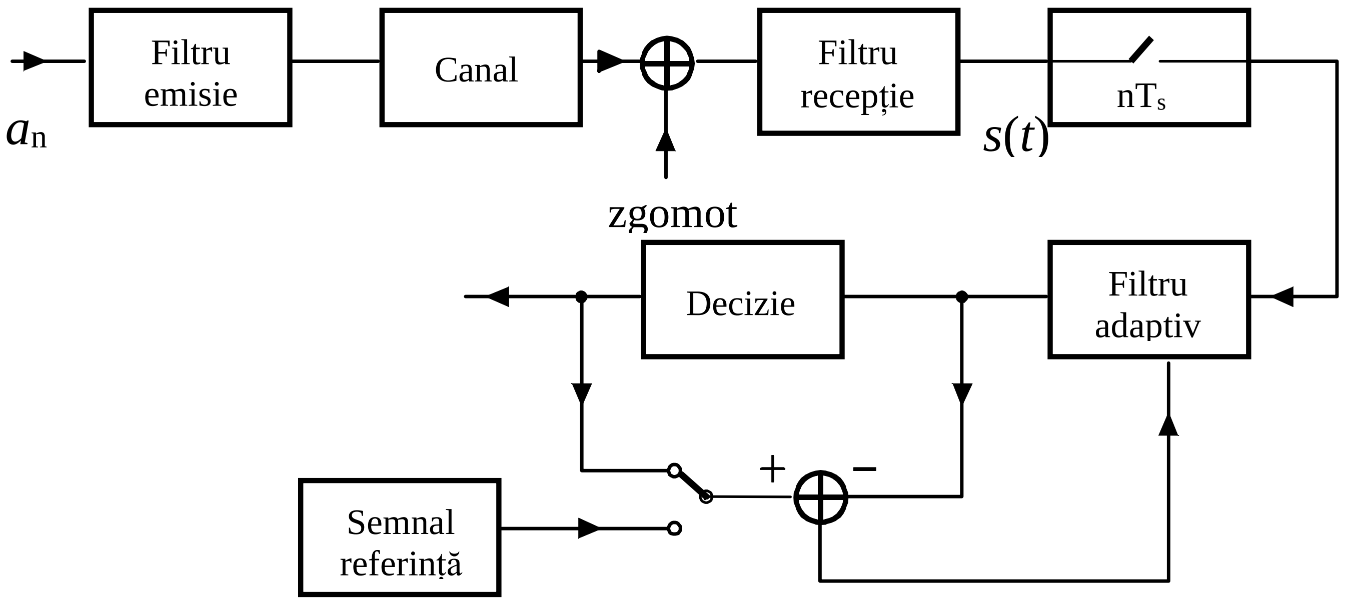
- Modelarea canalului radio
- Modelarea adaptivă în explorările geofizice

1.2.2 Modelarea inversă



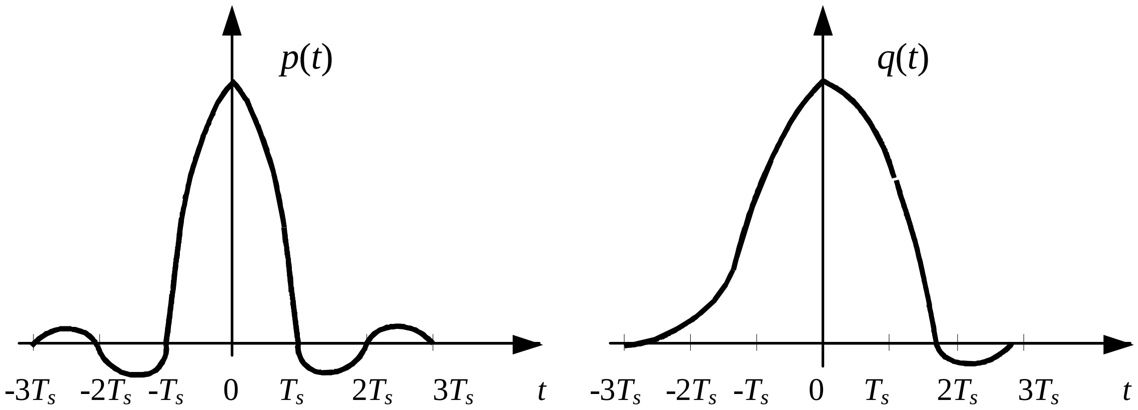
Aplicație tipică - Egalizarea automată

Egalizare automată



$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, p(t - kT_s); \qquad a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \cdots, \pm 2M - 1\}$$

Egalizare automată

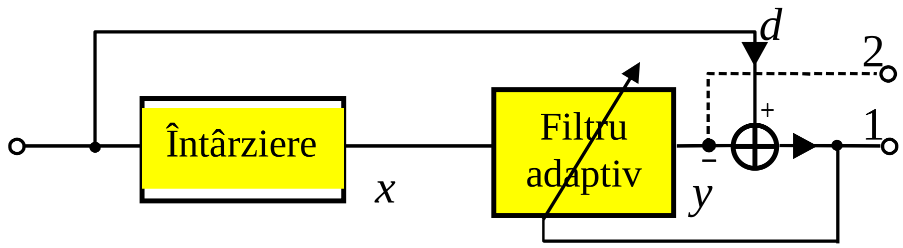


a) b)

$$p(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$s(mT_s) = a_m$$

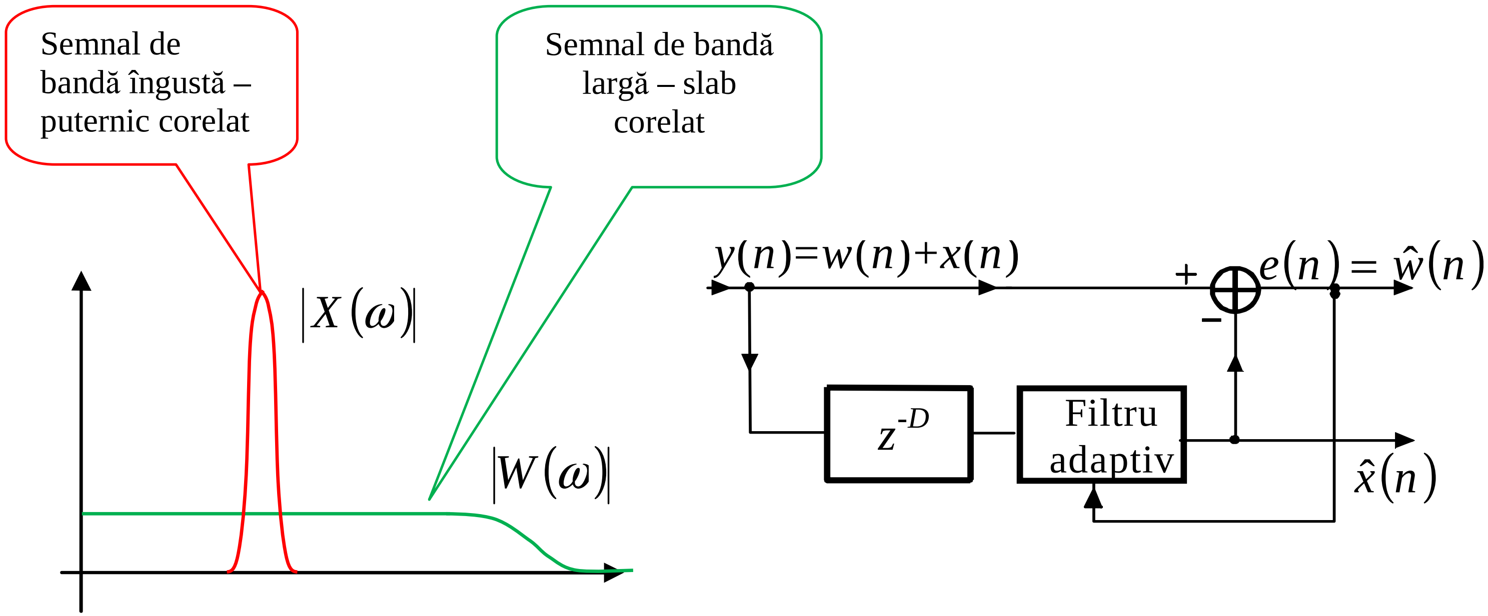
1.2.3. Predicția



Aplicații tipice

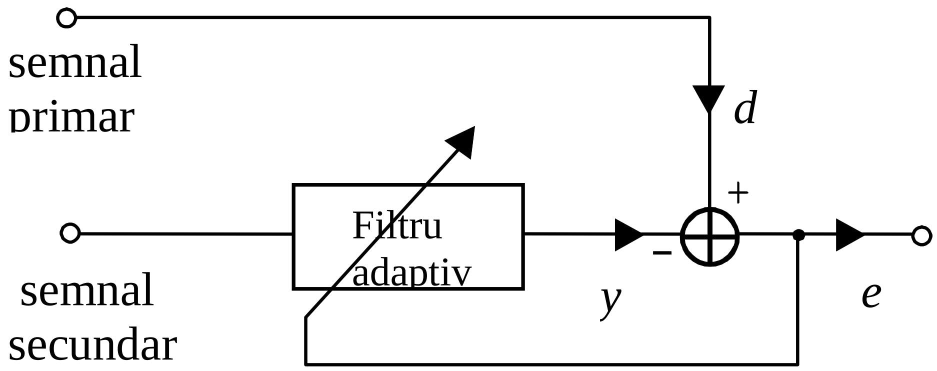
- Codarea predictivă a semnalelor vocale
- Suprimarea unei interferențe de bandă îngustă suprapusă peste un semnal de bandă largă
- Intensificarea semnalului (suprimarea unui zgomot de banda largă)

Suprimarea interferențelor pe baza proprietăților de autocorelație



Predicția se bazează pe existența unei autocorelații.
Bandă îngustă ↔ timp de autocorelație mare (puternic corelat)
Bandă largă ↔ timp de autocorelație mic (slab corelat)

1.2.4 Suprimarea interferențelor



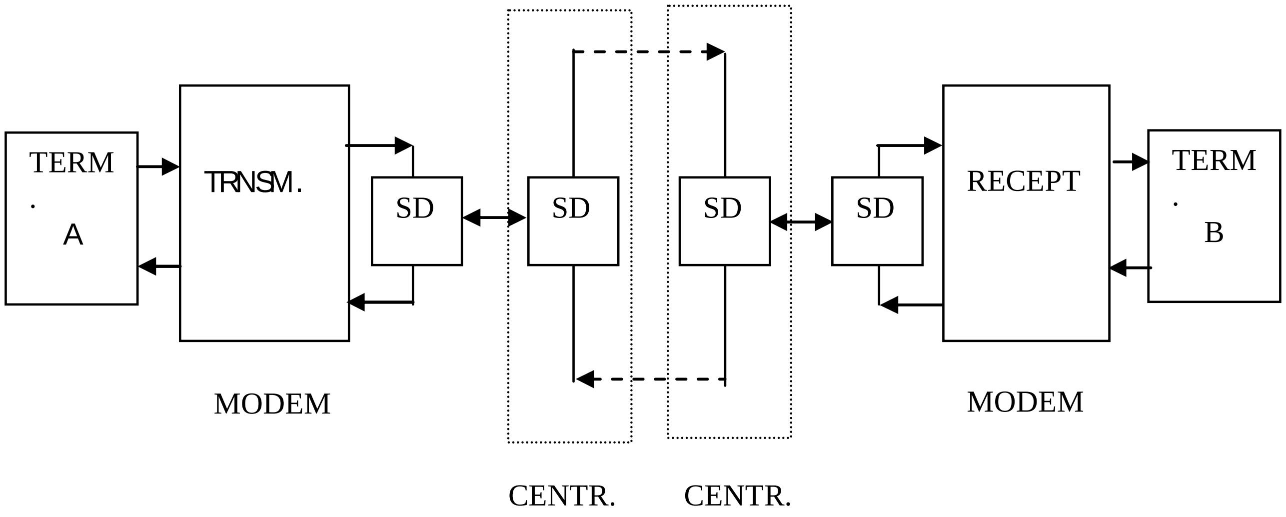
Semnalul primar = semnal util + semnal perturbator
Semnalul secundar = semnal corelat numai cu semnalul perturbator

Funcționează pe baza proprietăților de intercorelație – filtrul adaptiv funcționează dacă există o anumită intercorelație între semnalul de intrare şi semnalul dorit.

Aplicații tipice

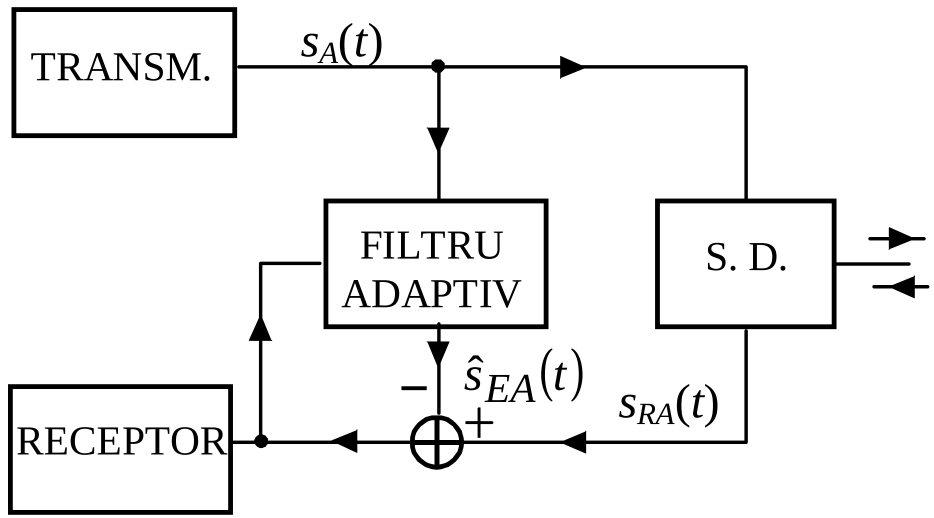
- Suprimarea ecoului în transmisiunile de date pe canale telefonice (ecou electric)
- Suprimarea ecoului acustic
- Reducerea zgomotului în transmisiunile vocale
- Reducerea unei interferențe prin modificarea caracteristicii de directivitate a unui sistem de antene

Suprimarea ecoului electric



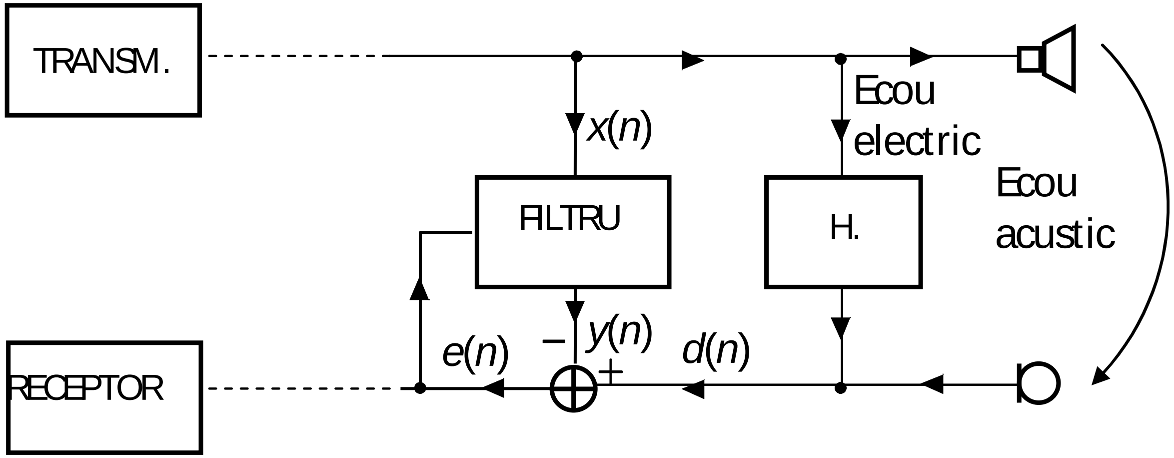
$$s_{RA}(t) = A_1 s_B(t) + A_2 s_A(t - d_1) + A_3 s_A(t - d_2) = A_1 s_B(t) + s_{EA}(t)$$

Suprimarea ecoului electric



Suprimarea ecoului electric

Conform G 168 ITU+T



2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - definitie

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1)]^T$$

$$\mathbf{R} = \mathrm{E}\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & . & . & . & r(N-1) \\ r(-1) & r(0) & . & . & . & r(N-2) \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ r(-N+1) & r(-N+2) & . & . & . & r(0) \end{bmatrix}$$

$$r(k) = \mathrm{E}\{x^*(n)x(n+k)\} = \mathrm{E}\{x^*(n-k)x(n)\}$$

$$r_{ij} = r(j-i)$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

1. Hermitică: $\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$

2. Toeplitz

3. Pozitiv semidefinită:

$$\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} r(j-i)\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j \geq 0.$$

$$\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u}^H \operatorname{E}\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\}\mathbf{u} = \operatorname{E}\{\mathbf{u}^H \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{u}\} = \operatorname{E}\left\{\left|\mathbf{u}^H \mathbf{x}(n)\right|^2\right\} \geq 0.$$

4. $\mathbf{x}^B(n) = [x(n-N+1), x(n-N+2), \ldots, x(n)]^T$

$$\operatorname{E}\{\mathbf{x}^B(n)\mathbf{x}^{BH}(n)\} = \mathbf{R}^T.$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

5. ***Matricea de autocorelație extinsă şi partiția ei***.

Fie $\mathbf{R}$ de dimensiune NxN, $\mathbf{R}_N$ şi matricea de autocorelație extinsă de dimensiune $(N+1)$x$(N+1)$, $\mathbf{R}_{N+1}$.

$$\mathbf{R}_{N+1} = \begin{bmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_N & \mathbf{r}^{B*} \\ \mathbf{r}^{BT} & r(0) \end{bmatrix}$$

unde

$$\mathbf{r}^H = [r(1), r(2), \ldots, r(N)]$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

Proprietăți legate de valorile/vectorii proprii

Fie λ_i valorile proprii ale matricei **R**, deci rădăcinile ecuației caracteristice

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

şi $\mathbf{q}_i$ vectorii proprii asociați,

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i, \quad i = 1,\ldots,N.$$

6. Valorile proprii ale matricei $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{Z}$, sunt λ_i^k, i=1,2,..,N.

7. Dacă λ_i, i=1,..,N sunt distincte, atunci vectorii $\mathbf{q}_i$ sunt liniar independenți.

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

7. Dacă λ_i, i=1,..,N sunt distincte, atunci vectorii $\mathbf{q}_i$ sunt liniar independenți.

8. $\lambda_i \in \mathbf{R}_+, \quad i = 1, \cdots N$

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{q}_i^H \mathbf{R} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_i} \geq 0$$

9. $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i, j = 1,2,\ldots,N,\ i \neq j \quad \Rightarrow$ $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_j$ ortogonali,

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0$$

Demonstrație. Conform definiției:

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{R} \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i \qquad \mathbf{q}_j^H \mathbf{R}^H = \mathbf{q}_j^H \mathbf{R} = \lambda_j \mathbf{q}_j^H$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = 0$$

Se poate construi un set ortonormat de vectori proprii

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{q}_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

10. ***Diagonalizarea*** matricei **R**

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$$

unde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N], \quad \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

iar $\mathbf{q}_i$ reprezintă un set ortonormal de vectori proprii. Matricea **Q** este *unitară*:

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H .$$

Demonstrație

$$\mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}$$

şi se înmulțeşte la stânga cu $\mathbf{Q}^H$.

Teorema lui Mercer (teorema spectrală):

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\,\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{Q}^H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H .$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

11. ***Urma matricei*** **R**

$$\operatorname{tr}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

$$r(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i .$$

12. ***Norma spectrală*** a unei matrice **A**

$$\|\mathbf{A}\|_s = \left(\text{valoarea proprie maxima a matricei } \mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\mathbf{R}\|_s = \lambda_{\max} .$$

Numărul condițional

$$\chi(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_s \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_s$$

$$\|\mathbf{R}\|_s = \lambda_{\max}, \quad \left\|\mathbf{R}^{-1}\right\|_s = \frac{1}{\lambda_{\min}}, \quad \Rightarrow \quad \chi(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

2.1.3 Matricea de autocorelație a unui proces staționar - proprietăți

13. *Câtul Rayleigh* asociat unui vector **u** nenul, de dimensiune *N*x1

$$\frac{\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}$$

$$\lambda_{\min} = \min \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}, \quad \lambda_{\max} = \max \frac{\mathbf{u}^H \mathbf{R}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^H \mathbf{u}}$$

14. $$\min_{\omega} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right) \le \lambda_i \le \max_{\omega} P_{xx}\left(e^{j\omega}\right)$$